2019-2024 年单招数学考点分类汇编

§1 集合

1.【2019 年第 1 题】已知集合 $M=\{x|x>-1\},N=\{x|x^2>1\}$,则$M\cap N=$（ C ）

A. $\{x|x>-1\}$　　B． $\{x|x>1或x<-1\}$

C. $\{x|x>1\}$　　D． $\{x|-1<x<1\}$

2.【2020 第 1 题】已知集合$A=\{x\mid 4<x<10\}$　$B=\{x\mid x=n^2,n\in N\}$，则 A∩B=（ C ）

A．∅　B．{3}　C．{9}　D．{4，9}

3.【2021 年第 1 题】设集合 $M=\{1,3,6\},N=\{3,4,5\}$,则 $M\cap N=$（ C ）

$A.\{1,4,6\}$　$B.\{1,4,5,6\}$　$C.\{3\}$　$D.\{1,3,4,5,6\}$

4.【2022 年第 1 题】若集合 $A=\{x\mid -1<x<4,x\in Z\},B=\{x\mid -2<x<1,x\in Z\}$，

则 A∩B 的元素共有（ A ）

A．1 个　B．2 个　C．3 个　D．4 个

5.【2023 年第 1 题】已知集合 A={-2,0,1},集合 B={x|-2<x<1,x∈Z},则 A∪B 中元素的个数为（ D ）

A．1　B．2　C．3　D．4

6.【2024 年第 1 题】已知集合 M={x|-7<x<3},集合 N={x|-2<x<6},则 M∩N=（ D ）

A.{x|-7<x<6}　B.{x|-7<x<3}　C.{x|-2<x<6}　D.{x|-2<x<3}

§2 定义域/值域/函数单调性、对称性、奇偶性

1.【2019 年第 15 题】已知二次函数 $f(x)=ax^2-3a^2x-1$，若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增，则 a 的取值范围是 $\underline{0<a\le\frac{2}{3}}$

2.【2020 年第 4 题】函数 $f(x)=\sqrt{3-4x+x^2}$ 的定义域为（ C ）

A． R　B．[1，3]

C． $(-\infty,1]\cup[3,+\infty)$　D．[0，1]

3.【2020 年第 5 题】函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ 图像的对称轴为（ A ）

A． $x=1$　B． $x=\dfrac{1}{2}$　C． $x=-\dfrac{1}{2}$　D． $x=-1$

4.【2020 年第 7 题】函数 $f(x)=\ln(-3x^2+1)$ 的单调递减区间为（ A ）

A． $(0,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$　B． $(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},0)$　C． $(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$　D． $(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\dfrac{\sqrt{3}}{3})$

5.【2021 年第 3 题】下列函数中既是增函数又是奇函数的是（ A ）

$A.y=3x$　$B.y=\dfrac{5}{x}$　$C.y=\ln x$　$D.y=-x^2+2x$

6. 【2021 年第 6 题】函数 $y=2-\sqrt{9-x^2}$ 的定义域为（ A ）

7. $A.[-3,3]$　$B.[-9,9]$　$C.[3,+\infty)$　$D.(-\infty,-3]$

【2021 年第 12 题】函数 $y=e^{|x|}$ 的最小值是 <u>1</u>

7.【2022 年第 2 题】函数 $f(x)=\log_2\sqrt{-x^2+2x+3}$ 的定义域是（ A ）

A.(-1,3)　B.[-1,3]　C.(-3,1)　D.[-3,1]

8.【2022 年第 3 题】下列函数中，为增函数的是 （ C ）

A. $y=-\ln(x+1)$　B. $y=x^2-1$　C. $y=\dfrac{e^x}{2}$　D. $y=|x-1|$

9.【2023 年第 2 题】已知函数 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le 0,\\ \log_3 x, & x>0.\end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right)=$（ B ）

A. -1　B. 1　$C.\sqrt{3}$　D. 3

10.【2024 年第 9 题】函数 $y=log_3(x-2)$的定义域是 <u>x>2</u>.

11.【2024 年第 10 题】函数 $y=-x^2-5x+6$ 的单调递减区间为 <u>（5/2,+∞）</u>

§3 不等式

1.【2019 年第 5 题】若 $2^{x+5}>\frac{1}{4}$，则 x 的取值范围为（ A ）

A、$(-7,+\infty)$　　B、$(7,+\infty)$　　C、$(-3,+\infty)$　　D、$(3,+\infty)$

2.【2020 年第 10 题】已知 $a=0.2^{0.3},b=0.3^{0.3},c=0.2^{-0.2}$ 则（ A ）

A. $a<b<c$　B. $b<a<c$　C. $b<c<a$　D. $a<c<b$

3.【2020 年第 13 题】不等式 $\log_{\frac{1}{2}}x>2$ 的解集是 $\underline{\left\{x\middle|0<x<\frac{1}{4}\right\}}$.

4.【2021 年第 13 题】不等式 $x^2-3x-10>0$ 的解集是 $\underline{\{x\mid x<-2\text{或}x>5\}}$

5.【2022 年第 10 题】不等式 $|1-x|>2$ 的解集是 $\underline{\{x\mid x<-1\text{或}x>3\}}$.

§ 4 平面向量

1.【2019 年第 2 题】已知向量 $\vec{a}=(1,2),\vec{b}=(1,-3)$，则 $\left|3\vec{a}+\vec{b}\right|=$（ A ）

A、5　　B、4　　C、3　　D、2

2.【2020 年 12 题】已知向量 $\vec{a},\vec{b}$，满足 $\left|\vec{a}\right|=2$，$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=1$，且 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 150°，则 $\left|\vec{b}\right|=\underline{\sqrt{3}}$.

3.【2021 年第 14 题】若向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left|\vec{a}\right|=3,\left|\vec{b}\right|=5,\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=7$，则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\_\frac{15}{2}\_\_$

4.【2022 年第 11 题】若向量 a，b 满足 $|a|=2,|b|=3$，且 a 与 b 的夹角为 120°，则 $a\cdot b=\underline{-3}$

5.【2023 年第 7 题】已知向量 a=(1,1),b=(-2,0),则 a 与 b 的夹角为（ D ）

A. 30°　　B. 45°　　C. 120°　　D. 135°

6.【2023 年第 6 题】已知点 A(2,2),B(-2,10),点 C 满足 $\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{AC}$,则 C 的坐标为（ A ）

A. (4,-2)　　B. (0,6)　　C. (-4,14)　　D. (-6,18)

§ 5 三角函数及解三角形

1.【2019 年第 4 题】已知$\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}(k \in Z)$，则$\tan\frac{\alpha}{2}$ =（ D ）

A.-1　　　$B.-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　$C.\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　D. 1

2. 【2019 年第 10 题】函数$f(x) = \sin x\cos x + \cos^2 x$的最大值为（ B ）

$A.\frac{\sqrt{2}}{2}$　　　$B.\frac{1+\sqrt{2}}{2}$　　　$C.\sqrt{2}$　　　$D.1+\sqrt{2}$

3.【2019 年第 14 题】在ΔABC中，AC=2，BC=3,AB=4,则　$\cos C =$ ___-1/4___

4.【2019 年第 17 题】已知ΔABC的内角A,B,C成等差数列

（1）求 B

（2）求$\sin A + \sqrt{3}\cos A$的最大值

解:（1）在ΔABC中$A + B + C = 180°$

又∵ A,B,C成等差数列

$\therefore A + C = 2B$

即$B = 60°$

（2）$\sin A + \sqrt{3}\cos A = 2\sin(A + 60°)$

$A \in (0°,120°)$

$\therefore A + 60° \in (60°,180°)$

$\therefore \sin(A + 60°)$的最大值为 1

所以　$\sin A + \sqrt{3}\cos A = 2\sin(A + 60°)$的最大值为 2

5.【2020 年第 3 题】函数$f(x) = \sin^2 x + \cos 2x$ 的最小周期是（ C ）

A．2π　　B．$\frac{3\pi}{2}$　　C．π　　D．$\frac{\pi}{2}$

6.【2020 年第 6 题】已知$\tan x = -\frac{1}{3}$，则$\sin 2x =$（　D　）

A．$\frac{3}{5}$　　B．$\frac{3}{10}$　　C．$-\frac{3}{10}$　　D．$-\frac{3}{5}$

7.【2020 年第 17 题】ΔABC的内角A,B,C的对边分别是a,b,c，$B = 30°$，$b = c + 1$.

（1）若$c = 2$，求$\sin C$；

（2）若$\sin C = \frac{1}{4}$，求ΔABC的面积.

解:（1）在$\triangle ABC$中，由$b = c + 1$且$c = 2$，可得$b = 3$，

根据正弦定理$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$，可得$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{2\sin 30^{\circ}}{3}=\frac{1}{3}$.

（2）由正弦定理可得$\frac{b}{\sin B}=\frac{C}{\sin C}=\frac{b}{\sin 30°}=\frac{b-1}{\sin C}$,

因为$\sin C=\frac{1}{4}$，可得$b=2,c=1$,

由余弦定理可得$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，可得$4=a^2+1-2\times a\times 1\times\cos 30^{\circ}$,

即$a^2-\sqrt{3}a-3=0$，解得$a=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{2}$,

所以$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{15}}{8}$.

8.【2021 年第 4 题】若$\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$,则$\sin x=$（ D ）

$A.-\frac{1}{4}$　　$B.-\frac{1}{3}$　　$C.-\frac{2}{3}$　　$D.-\frac{3}{4}$

9.【2021 年第 5 题】$\sin 168°\cos 18°-\sin 102°\sin 198°=$(C)

$A.-\frac{1}{2}$　　$B.0$　　$C.\frac{1}{2}$　　$D.1$

10.【2021 年 17 题】记ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c，已知

$a=7,b=8,\cos B=\frac{1}{7}$.

（1）求c；

（2）求ΔABC的面积S。

解：（1）$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{49+c^2-64}{14c}=\frac{1}{7}$

$c^2-2c-15=0$

$\therefore c=5,或c=-3(舍去)$

（2）

$\because \cos B=\frac{1}{7}$

$\therefore \sin B=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times 7\times 5\times\frac{4\sqrt{3}}{7}=10\sqrt{3}$

11.【2022 年第 4 题】函数$y=3\sin x+4\cos x+1$的最小值是（ D ）

A.-7　　B.-6　　C.-5　　D.-4

12.【2022 年第 7 题】在ΔABC 中，已知 A＝60°，AC＝2，BC＝$\sqrt{7}$，则 AB＝（ B ）
A.4　　　　　　B.3　　　　　　C.2　　　　　　D.1

13.【2022 年第 9 题】若 $\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta=$ __1/3__

14.【2023 年第 4 题】 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x$,则（ C ）

A. f(x)的最大值为 $\sqrt{3}+1$　　　　B. ∫(x)的最小正周期为π

C. 曲线 y=f(x)关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$对称 D. 曲线 y=f(x)关于点 $\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$对称

14.【2023 年第 9 题】$cos55°cos10°+cos35°sin10°=$($\frac{\sqrt{2}}{2}$)

15.【2023 年第 11 题】记△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,若 $a=\sqrt{3}, b=1, c=30°$,

则 AB 边上的高为（$\frac{\sqrt{3}}{2}$）

17.【2024 年第 2 题】函数 y=sin3x·cos3x 是（ A ）

A.最小正周期为$\frac{\pi}{3}$的奇函数　　　B.最小正周期为$\frac{\pi}{3}$的偶函数

C.最小正周期为$\frac{2\pi}{3}$的奇函数　　　D.最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$的偶函数

18.【2024年第13题】在△ABC中，$B=\frac{\pi}{3}, AB=5, \cos A=\frac{1}{7}$

(1)求AC;　　(2)点D在边BC上,且CD=3,求△ABD的面积.

13．(18分)

解：(1) $\because \sin^2A+\cos^2A=1, 0°<A<180°$，即 $\sin A>0$

$\therefore \sin^2A+\left(\frac{1}{7}\right)^2=1, \sin A=\frac{4\sqrt{3}}{7}$

$\because A, B, C$ 是三角形三个角

$\therefore A+B+C=\pi$

由三角函数诱导公式得 $\sin C=\sin(A+B)$

$=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$=\frac{4\sqrt{3}}{7}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{14}$

由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}, \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{5}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}$，解得 $b=7$，即 $AC=7$

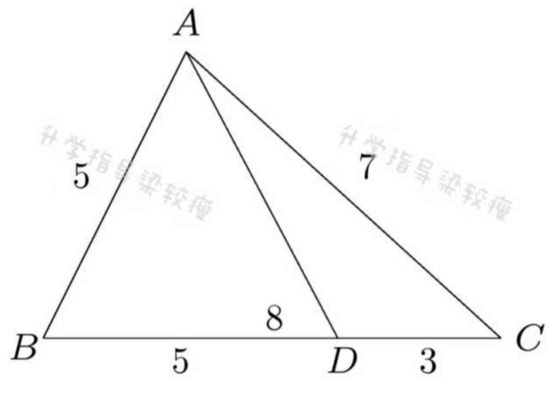
(2) 由余弦定理得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+5^2-7^2}{2\times a\times 5}=\frac{1}{2}$

$\frac{a^2-24}{10a}=\frac{1}{2}, a^2-24=5a, a^2-5a-24=0$，解得 $a=8$ 或 $a=-3$（舍去）

$\because CD=3$

$\therefore BD=BC-CD=5$

$S\triangle ABD=\frac{1}{2}\times|AB|\times|BD|\times\sin B=\frac{1}{2}\times5\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{25\sqrt{3}}{4}$



§6 数　列

1.【2019年第8题】等差数列$\{a_n\}$前n项和为S_n，若$a_5+a_6+a_7=15$，则$S_{11}=$(C)

$A.110$　　$B.80$　　$C.55$　　$D.30$

2.【2019年第13题】已知数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，且$a_3, 3a_2, a_4$成等差数列，则$\{a_n\}$的公比为__2__

3.【2020年第2题】1，3的等差中项是（ B ）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

4.【2020 年第 14 题】等比数列$\{a_n\}$中，若$a_1+a_2=\frac{3}{2}$，$a_4+a_5=12$，则$a_3=$ __2__ .

5.【2021 年第 2 题】已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2,$且$a_{n+1}=a_n+3$，则$a_n=$（ B ）

$A.2n$　　　$B.3n-1$　　　$C.3n-4$　　　$D.5n-3$

6.【2021 年第 11 题】若$\{a_n\}$是公比为 3 的等比数列，且$a_1+a_3=5$，则$a_5=$ __$\frac{81}{2}$__ 。

7.【2022 年第 15 题】

已知函数$f(x)=\frac{x^3+x+b}{x}$,$\{a_n\}$是等差数列，且$a_2=f(1),a_3=f(2),a_4=f(3)$

（1）求$\{a_n\}$的前 n 项和；

（2）求$f(x)$的极值.

【解析】（1）$a_2=f(1)=2+b,a_3=f(2)=\frac{10+b}{2},a_4=f(3)=\frac{30+b}{3}$

$\because\{a_n\}$为等差数列,即$a_2+a_4=2a_3$解得

$b=-6$

$\therefore a_1=-10,d=6$

$\therefore a_n=6n-16$

$\therefore S_n=\frac{n(-10+6n-16)}{2}=3n^2-13$

$(2)f(x)=\frac{x^3+x-6}{x}$

$f'(x)=\frac{(3x^2+1)x-(x^3+x-6)}{x^2}=\frac{2x^3+6}{x^2}$

$f'(x)=0$

$x=-\sqrt[3]{3}$

x	$\left(-\infty,-\sqrt[3]{3}\right)$	$-\sqrt[3]{3}$	$\left(-\sqrt[3]{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	$-$	0	+
$f(x)$	↘	极　小　值 $f(-\sqrt[3]{3})=9\sqrt[3]{9}+1$	↗

8.【2023 年第 3 题】设 Sn 为等差数列 $\{a_n\}$的前 n 项和，若 $a_3=5,S_6=36,$则$a_{10}=$（ B ）

A. 17　　　B. 19　　　C. 21　　　D. 23

9.【2024 年第 5 题】在等比数列$\{a_n\}$中， $a_1+a_2=324,a_3+a_4=36,$则 $a_5+a_6=$（ B ）

A.2　　　B. 4　　　C. 9　　　D. 252

10.【2024 年第 11 题】已知数列 $\{a_n\}$的前 n 项和 $S=n^2+n,$则其通项$a_n=$ __2n__

§7 解 析 几 何

1.【2019 年第 3 题】点（1，—1）到直线 $x-2y-8=0$ 的距离是（ B ）

$A.5$　　　$B.\sqrt{5}$　　　$C.\dfrac{\sqrt{5}}{5}$　　　$D.\dfrac{1}{5}$

2.【2019 年第 9 题】若方程 $x^2+y^2+4ax-2y+5a=0$ 表示的曲线是圆，则 a 的取值范围是(C)

$A.(\dfrac{1}{4},1)$　　$B.(-1,\dfrac{1}{4})$　　$C.(-\infty,\dfrac{1}{4})\cup(1,+\infty)$　　$D.(-\infty,-1)\cup(-\dfrac{1}{4},+\infty)$

3.【2019 年第 12 题】双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的离心率是($\dfrac{\sqrt{5}}{2}$)

4.【2019 年第 18 题】已知椭圆 C：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的离心率为$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，焦距是 4,

（1）求 C 的方程;

（2）过点(−3,0)且斜率为 k 的直线 l 与 C 相交于 A,B 两点，O 为坐标原点，当 $AO\perp OB$ 时，求 k 的值

解：（1）$\because \dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{6}}{3},2c=4$，

$\therefore a=\sqrt{6}$

又$a^2=b^2+c^2$

$\therefore b=\sqrt{2}$

$\therefore$ 椭圆方程为$\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$

（2）设直线 l：$y=k(x+3),A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$

联立$\begin{cases} y=k(x+3) \\ \dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得 $(1+3k^2)x^2+18k^2x+27k^2-6=0$

$x_1+x_2=\dfrac{-18k^2}{1+3k^2},x_1x_2=\dfrac{27k^2-6}{1+3k^2}$

$\because AO\perp OB$

$\therefore x_1x_2+y_1y_2=0$

$y_1y_2=k^2[3(x_1+x_2)+x_1x_2+9]=\dfrac{3k^2}{1+3k^2}$

$x_1x_2+y_1y_2=\dfrac{27k^2-6}{1+3k^2}+\dfrac{3k^2}{1+3k^2}=\dfrac{30k^2-6}{1+3k^2}=0$ 即 $k=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

5.【2020 年第 8 题】若一个椭圆的两个焦点三等分它的长轴，则该椭圆的离心率为（ B ）

A．$\frac{1}{6}$　B．$\frac{1}{3}$　C．$\frac{1}{2}$　D．$\frac{2}{3}$

6.【2020 年第 9 题】双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的两条渐近线的倾斜角分别为 α 和 β，则 $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$（ D ）

A．1　B．$\frac{\sqrt{3}}{2}$　C．$\frac{1}{2}$　D．0

7.【2020 年第 18 题】已知抛物线 C 的顶点在原点，焦点为 $F(-1,0)$.

（1）求 C 的方程；

（2）设 P 为 C 的准线上一点，Q 为直线 PF 与 C 的一个交点且 F 为 PQ 的中点，求 Q 的坐标及直线 PQ 的方程.

解:（1）由题可设抛物线方程为 $y^2=-2px$，又∵焦点（−1，0）可得 $-\frac{p}{2}=-1$

$\therefore p=2$，$\therefore y^2=-4x$

（2）设点 P 坐标为 $(1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

$\because F$ 为 PQ 中点，$\therefore \frac{1+x_2}{2}=-1$，$\therefore x_2=-3$

$\because Q$ 在抛物线上，将 $x_2=-3$ 代入得 $y_2=\pm2\sqrt{3}$，

$\therefore Q(-3,2\sqrt{3})$ 或 $(-3,-2\sqrt{3})$

当 $y_2=2\sqrt{3}$ 时，由 $\frac{y_1+y_2}{2}=0$ 得 $y_1=-2\sqrt{3}$；

当 $y_2=-2\sqrt{3}$ 时，由 $\frac{y_1+y_2}{2}=0$ 得 $y_1=2\sqrt{3}$；

$\therefore$ 点 $P(1,2\sqrt{3})$ 或 $(1,-2\sqrt{3})$；$\therefore k_{PQ}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\sqrt{3}$

$\therefore$ 直线方程 $\sqrt{3}x+y-3\sqrt{3}=0$ 或 $\sqrt{3}x+y+\sqrt{3}=0$

8.【2021 年第 7 题】以双曲线 $C:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的中心为顶点，C 的左焦点为焦点的抛物线的方程为 （ D ）

$A.y^2=20x$　$B.y^2=10x$　$C.y^2=-10x$　$D.y^2=-20x$

9.【2021 年第 15 题】若椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$，过 F_1 的直线交 C 于 A,B 两点，且 ΔABF_2 的周长为 12，则 C 的方程为　（$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$）

10.【2021 年第 18 题】已知⊙ $M:(x-a)^2+(x-a^2)^2=4$

（1）当 $a=1$ 时，求⊙ M 截直线 $x-y-2=0$ 所得弦的长；

（2）求点 M 的轨迹方程。

解：（1）圆心为 $(1,1)$，半径为 $r=2$

圆心到直线的距离 $d=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$

$\therefore$ 弦长为 $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{2}$

（2）$M(x,y),x=a,y=a^2$，

所以 M 的轨迹方程为 $x^2=y$

11.【2022 年第 5 题】已知 O 为坐标原点，点 A（2,2），M 满足｜AM｜=2｜OM｜，则点 M 的轨迹方程为（B）

A.$3x^2+3y^2+4x+4y-8=0$　　B.$3x^2+3y^2-4x-4y-8=0$

C.$x^2+y^2+4x+4y-4=0$　　D.$x^2+y^2-4x-4y-4=0$

12.【2022 年第 14 题】

已知 O 是坐标原点，双曲线 C：$\frac{x^2}{a^2}-y^2=1$（$a>0$）与抛物线 D：$y^2=\frac{1}{4}x$ 交于 A，B 两点，ΔAOB 的面积为 4.

（1）求 C 的方程；

（2）设 F_1，F_2 为 C 的左、右焦点，点 P 在 D 上，求所 $\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值.

（1）设 A（$m,\frac{1}{2}\sqrt{m}$），B（$m,-\frac{1}{2}\sqrt{m}$）　$|AB|=\sqrt{m}$

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}m\cdot\sqrt{m}=4$, 解得 $m=4$

即 A（4,1）

$\therefore\frac{16}{a^2}-1=1$, 即 $a^2=8$

$\therefore\frac{x^2}{8}-y^2=1$

（2）

$c^2=a^2+b^2=8+1=9$

$c=3$

设 P（$4n^2,n$）

$\overrightarrow{PF_1}=(-3-4n^2,-n)$

$\overrightarrow{PF_2}=(3-4n^2,-n)$

$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}=(-3-4n^2)\cdot(3-4n^2)+(-n)\cdot(-n)=16n^4-9+n^2=16\left(n^2+\frac{1}{32}\right)^2-\frac{1}{64}-9$

$\therefore\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}$ 的最小值为 -9

13.【2023 年第 12 题】 已知 F 为抛物线 C:$y^2=4x$ 的焦点，过 F 的直线与 C 交于 A，B 两点，若|AF|=2|BF|,则|AB|= 9/2

14.【2023 年第 15 题】已知 O 是坐标原点，点 $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+y^2=1(a>1)$上

(1)求 C 的方程　　(2)设 M,N 是 C 上两点,且 $OM\perp ON$,证明 $\frac{1}{|OM|^2}+\frac{1}{|ON|^2}=\frac{5}{4}$

15.【2024 年第 3 题】双曲线

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

的焦点到渐近线的距离为（ C ）

A.10　　B.8　　C.6　　D. $\frac{5}{4}$

16.【2024 年第 4 题】抛物线 $x^2=2y$的焦点坐标为（ D ）

A.($\frac{1}{8}$,0)　　B.($\frac{1}{2}$,0)　　$C.\left(0,\frac{1}{8}\right)$　　$D.\left(0,\frac{1}{2}\right)$

17.【2024 年第 14 题】已知椭圆 C 的中心为坐标原点，焦点 F_1和 F_2在 x 轴上，离心率为 $\frac{5}{7}$,点$\left(0,2\sqrt{6}\right)$在 C 上.

(1)求 C 的方程；　　($\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{24}=1$)

(2)设点 M 在 C 上, $\angle F_1MF_2=90°$,求 $\triangle F_1MF_2$的面积. (24)

§8 二项式定理

1.【2019 年第 11 题】（11）$(1+2x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是 84 ；

3. 【2020 年第 15 题】$(x-3y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为 -270 .

3.【2021 年第 8 题】$\left(x^2-\frac{1}{2x}\right)^6$的展开式中的常数项为 B

$A.-\frac{15}{8}$　　$B.\frac{15}{16}$　　$C.-\frac{15}{16}$　　$D.\frac{15}{8}$

4.【2023 年第 6 题】 $\left(x-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$的展开式中$x^7$的系数为（ A ）

A. 180　　B. 45　　C. - 45　　D. - 180

5.【2024 年第 8 题】已知 $(2x-1)^7=a_0x^7+a_1x^6+\cdots+a_6x+a_7$,则 $a_0+a_1+\cdots+$

$a_7 =$(D)

$A. -3^7$　　$B. -3^7+1$　　C.0　　D.1

§9 概率统计

1.【2019 年第 7 题】从 1，2，3，4，5 这 5 个数中，任取 2 个不同的数，其和为偶数的概率是（ D ）

A、$\frac{3}{4}$　　B、$\frac{3}{5}$　　C、$\frac{1}{2}$　　D、$\frac{2}{5}$

2.【2020 年第 11 题】从 1,2,3,4,5 中任取 3 个不同数字，这 3 个数字之和是偶数的概率为 __$\frac{3}{5}$____.

3.【2021 年第 9 题】从 4 名女生、3 名男生中任选 4 人做自愿者，则其中至少有 1 名男生的不同选法共有(B)

A. 12 种　　B. 34 种　　C. 35 种　　D. 168 种

4.【2021 年第 9 题】从数字 1， 2， 3， 4， 5 中随机取 3 个不同的数字，其和为偶数的概率为 3/5

5.【2022 年第 6 题】从 3 名男队员和 3 名女队员中各挑选 1 名队员，则不同的挑选方法共有(B)

A．6 种　　B．9 种　　C．12 种　　D．15 种

6.【2022 年第 13 题】

某射击运动员各次射击成绩相互独立，已知该运动员一次射击成绩为 10 环的概率为 0.8,9 环的概率为 0.1，小于 9 环的概率为 0.1．该运动员共射击 3 次．

（1）求该运动员恰有 2 次成绩为 9 环的概率；

（2）求该运动员 3 次成绩总和不小于 29 环的概率．

(1)设该运动员恰有两次成绩为9环的事件为A

$P(A)=C_3^2(0.1)^2 0.9=3\times0.01\times0.9=0.027$

(2)设该运动员3次成绩成绩总和不29环的事件为B

$P(B)=0.8^3+C_3^1\times0.1\times0.8^2=0.704$

7.【2023 年第 13 题】甲、乙、丙 3 人参加国防知识竞赛，设甲、乙、丙在竞赛中获得满分的概率分别为 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$,$\frac{1}{2}$,且 3 人的竞赛成绩相互独立

(1)求恰有 2 人获得满分的概率　　(2)求至少有 1 人获得满分的概率

13. (18分)

甲、乙、丙3人参加国防知识竞赛，设甲、乙、丙在竞赛中获得满分的概率分别为$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{2}$，且3人的竞赛成绩相互独立

(1) 求恰有2人获得满分的概率

(2) 求至少有1人获得满分的概率

解：(1) 恰有2人获得满分的概率$P=\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{7}{18}$

(2) 全都不获得满分的概率$P=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{9}$

至少1人获得满分的概率$P=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$

8.【2024年第7题】从甲、乙、丙、丁4个人中任选2人组成志愿小组，则甲被选中的概率为（ C ）

A.1　　B. $\frac{2}{3}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{1}{3}$

9.【2024年第12题】甲、乙等5名运动员排成一排，则甲、乙相邻的排法共有__48__种.

§10 空间几何

1.【2019年第6题】已知圆锥的母线长为4，底面周长为2π，则圆锥的表面积为（　A　）

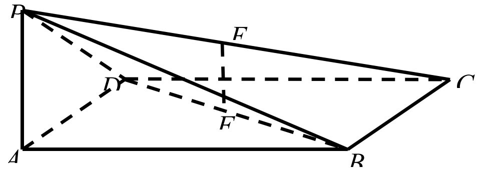
A、4π　　B、5π　　C、8π　　D、9π

2.【2019年第16题】已知正四棱柱ABCD－A'B'C'D'的底面边长为2，点P是底面A'B'C'D'的中心，且点P到直线AB的距离为3，则ΔPAC的面积为____4_____

3.【2019年第19题】如图，四棱柱P-ABCD的底边是边长为2的正方形，侧面PAD⊥底面ABCD，且PA=PD=$\sqrt{2}$，E、F分别是PC，BD的中点

（1）证明：EF∥平面PAD；

（2）求二面角P－DB－A的正切值



解:(1)证明:连接AC，且F是底面正方形$ABCD$边BD的中点

$\therefore F$也是AC的中点

又$\because E$是PC的中点

$\therefore EF // PA$，

又$PA \subset$面PAD

$\therefore EF //$面PAD

(2)$\because PA = PD$,取AD中点M

$\therefore PM \perp AD$，又面$PAD \perp$底面$ABCD$

$\therefore PM \perp$底面$ABCD$

$\because$底面$ABCD$是正方形

$\therefore AF \perp BD$

取DF中点N

$\therefore MN \perp DF$，连接PN

$\therefore \angle PNM$为所求角的平面角

$PM = 1, MN = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan \angle PNM = \dfrac{PM}{MN} = \sqrt{2}$

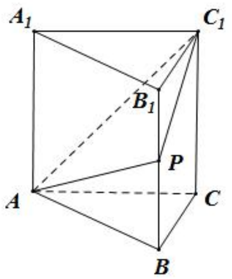
4.【2020 年第 16 题】若平面α, β, γ满足$\alpha \perp \gamma$，$\alpha \cap \gamma = a$，$\beta \perp \gamma$，$\beta \cap \gamma = b$，有下列四个判断：

①$\alpha // \beta$　　　　②当$a // \beta$时，$a // b$

③$a \perp \beta$　　　　④当$\alpha \cap \beta = c$时，$c \perp \gamma$

其中，正确的是__②④____.（填写所有正确判断的序号）

5.【2020 年第 19 题】如图，正三棱柱$ABC - A_1B_1C_1$中，P为BB_1上一点，ΔAPC_1为等腰直角三角形.



（1）证明P为BB_1的中点；

（2）证明：平面$APC_1 \perp$平面ACC_1A_1；

（3）求直线PA与平面ABC所成角的正弦值

解：(1）证明：由题意可得$\triangle ABP$与$\triangle C_1B_1P$为直角三角形，

又∵ $\triangle APC_1$ 为等腰直角三角形，

∴ $AP = PC_1$，

又∵三菱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为正三菱柱，

∴ $AB = B_1C_1$

∴ $Rt\triangle ABP \cong Rt\triangle C_1B_1P$，∴ $BP = B_1P$，∴ P 为 BB_1 中点.

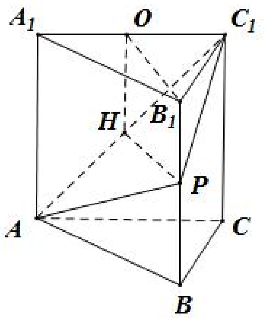
（2）证明：取 AC_1 中点 H，连接 PH，又∵ $\triangle APC_1$ 为等腰直角三角形，

∴ $PH \perp AC_1$，作 A_1C_1 中点 O，连接 B_1O、HO，

则四边形 B_1OHP 为平行四边形，∴ $PH // B_1O$，$PH = B_1O$

又∵ $\triangle AB_1C_1$ 为正三角形，O 为 A_1C_1 中点，∴ $B_1O \perp A_1C_1$，∴ $PH \perp A_1C_1$

$AC_1 \cap A_1C_1 = C_1$，∴ $PH \perp$ 平面 ACC_1A_1，又 $PH \subset$ 平面 APC_1，∴平面 $APC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1.



（3）由题意可知，$\angle PAB$ 为直线 PA 与平面 ABC 所成角，故设 $AB = 2$，则 $B_1O = \sqrt{3} = PH$

∵ $\triangle APC_1$ 为等腰直角三角形，∴ $AC_1 = 2\sqrt{3}$，$AA_1 = \sqrt{\left(2\sqrt{3}\right)^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$，则 $BP = \sqrt{2}$

$AP = \sqrt{2^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}$，∴ $\sin\angle PAB = \dfrac{BP}{AP} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

6.【2021年第10题】已知 m, n 为两条直线，α, β 为两个平面，下述四个结论：

①若 $m // \alpha, n // \beta, \alpha // \beta$，则 $m // n$；

②若 $m // \alpha, n // \beta, \alpha \perp \beta$，则 $m \perp n$；

③若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha // \beta$，则 $m // n$；

④若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \perp \beta$，则 $m \perp n$.

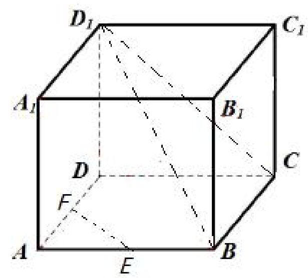
其中正确结论的编号是(　D　)

A.①②　　　*B*.②④　　　*C*.①④　　　*D*.③④

7.【2021 年第 19 题】如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， E,F 分别为 AB,AD 的中点。

（1）证明：直线 EF // 平面 CB_1D_1；

（2）设 $AB=2$，求三棱锥 $B-CB_1D_1$ 的体积。



（1）证明：连接 B_1D_1、BD

在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $B_1D_1 // BD$

$\because E,F$ 分别为 AB,AD 的中点

$\therefore EF // BD // B_1D_1$

$B_1D_1 \subset$ 面 B_1D_1D

$EF //$ 面 B_1D_1D

（2） 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中 $C_1D_1 \perp$ 面 B_1BCC_1

$$\therefore V_{B-CB_1D_1}=V_{D-BB_1C}=\frac{1}{3}\left|C_1D_1\right|\cdot S_{\Delta BB_1C}=\frac{1}{3}\times 2\times\frac{1}{2}\times 2\times 2=\frac{4}{3}$$

8.【2023 年第 5 题】正方体的表面积为 6，其顶点都在同一球面上，则该球的体积为（ A ）

$A.\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$　　B. π　　$C.\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$　　D. 3π

9.【2023 年第 8 题】 正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$底面三角形的边长为 1，点 P 为 AB 中点，PC=PA₁,则（ C ）

$A.AA_1=1$　　$B.A_1C=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$C.tanPAC_1=1$　　D. △AB_1C 的面积为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

10.【2022 年第 8 题】长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，O 是 AB 的中点，且 $OD=OB_1$，则(C)

A. $AB=CC_1$　　B. AB=BC　　C. ∠CBC_1=45°　　D. ∠BDB_1=45°

11.【2022 年第 12 题】设 α,β,γ 是三个平面，有下列四个命题：

①若 $\alpha\perp\beta,\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha\perp\gamma$

②若 $\alpha//\beta,\beta//\gamma$, 则 $\alpha//\gamma$

③若 $\alpha\perp\beta,\beta//\gamma$, 则 $\alpha\perp\gamma$

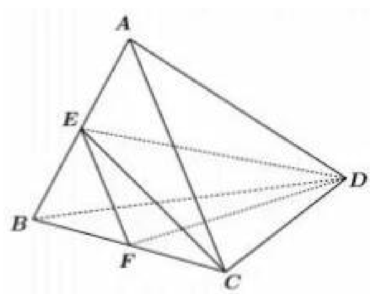
④若 $\alpha//\beta,\beta\perp\gamma$, 则 $\alpha//\gamma$

其中所有真命题的序号是___②_③_____

12.【2024 年第 15 题】在四面体 ABCD 中,点 E、F 分别为 AB、BC 的中点.

(1)证明:AC // 平面 DEF;

(2)求四面体 CDEF 的体积与四面体 ABCD 的体积的比值.



15. (18分)

证明：(1) ∵ E、F 分别为 AB，BC 的中点

∴ EF 为 $\triangle ABC$ 中位线，即 $EF \parallel AC$

∵ $EF \subset$ 平面 DEF，$AC \not\subset$ 平面 DEF

∴ $AC \parallel$ 平面 DEF

(2) ∵ F 为 BC 中点

∴ $S\triangle CDF = \dfrac{1}{2} S\triangle BCD$

以 CDF 为底面，设四面体 $EFCD$ 高为 h_1

以 BCD 为底面，设四面体 $ABCD$ 高为 h_2

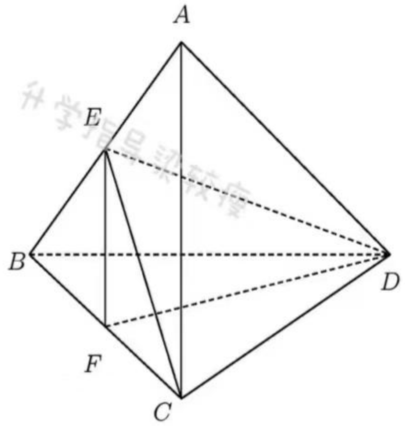
∵ E 是 AB 中点

∴ $h_1 = \dfrac{1}{2} h_2$

四面体 $CDEF$ 体积 $V_1 = \dfrac{1}{3} \times S\triangle CDF \times h_1$

四面体 $ABCD$ 体积 $V_2 = \dfrac{1}{3} \times S\triangle ABC \times h_2$

$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{4}$



§11 导 数

1. 【2023 年第 10 题】 已知函数 $f(x) = mx^3 - (m+1)x^2$ 在区间(1，+∞)单调递增，则 m 的取值范围是______

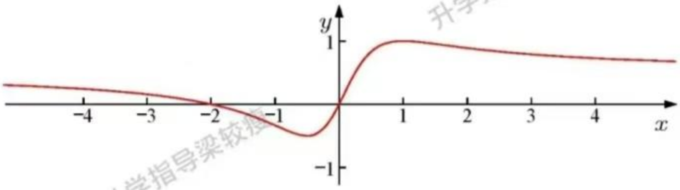
解： $f'(x) = 3mx^2 - 2(m+1)x \geq 0, m(3x^2 - 2x) > 2x, m > \frac{2x}{3x^2-2x} = \frac{2}{3x-2}$,右式当 x>1 的取值范围是（0,1)，所以 m 的取值范围是 m≥2.

2.【2023 年第 14 题】已知函数 $f(x) = \frac{x^2+ax}{2x^2+1}$,曲线 y=f(x)在点(0,f(0))处的切线与直线 2x-y+1=0 平行.

(1)求 a　　(2)求 f(x)的极值

14. (18分)

已知函数$f(x)=\dfrac{x^2+ax}{2x^2+1}$,曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线与直线$2x-y+1=0$平行



(1) 求a

(2) 求$f(x)$的极值

解:(1)$f(x)=\dfrac{x^2+ax}{2x^2+1}$

$$f'(x)=\frac{(2x+a)(2x^2+1)-(x^2+ax)\times 4x}{(2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{4x^3+2x+2ax^2+a-4x^3-4ax^2}{(2x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2ax^2+2x+a}{(2x^2+1)^2}$$

$2x-y+1=0$, $y=2x+1$

若切线斜率与直线平行,则切线在点$(0,f(0))$处的斜率$k=2$

即$f'(0)=2$, $\dfrac{a}{(0+1)^2}=2$,解得$a=2$

(2) 由(1)$a=2$得,$f(x)=\dfrac{x^2+2x}{2x^2+1}$,$f'(x)=\dfrac{-4x^2+2x+2}{(2x^2+1)^2}$

令$f'(x)=0$,即$\dfrac{-4x^2+2x+2}{(2x^2+1)^2}=0$,$\dfrac{-2(2x^2-x-1)}{(2x^2+1)^2}=0$,$\dfrac{-2(2x^2-x-1)}{(2x^2+1)^2}=0$,$\dfrac{-2(x-1)(2x+1)}{(2x^2+1)^2}=0$,解得$x_1=1$,$x_2=-\dfrac{1}{2}$

令$f'(x)<0$,解得$x<-\dfrac{1}{2}$或$x>1$;令$f'(x)>0$,解得$-\dfrac{1}{2}<x<1$

$\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	1	$(1,+\infty)$
↘	极小值	↗	极大值	↘

极大值为$f(1)=\dfrac{1^2+2\times 1}{2\times 1^2+1}=1$;极小值为$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1}=-\dfrac{1}{2}$