

2019-2024 年单招数学考点分类汇编

§1 集合

1. 【2019 年第 1 题】 已知集合 $M = \{x|x > -1\}$, $N = \{x|x^2 > 1\}$, 则 $M \cap N =$ (C)
- A. $\{x|x > -1\}$ B. $\{x|x > 1 \text{ 或 } x < -1\}$
C. $\{x|x > 1\}$ D. $\{x|-1 < x < 1\}$
2. 【2020 年第 1 题】 已知集合 $A = \{x|4 < x < 10\}$, $B = \{x|x = n^2, n \in N\}$, 则 $A \cap B =$ (C)
- A. \emptyset B. $\{3\}$ C. $\{9\}$ D. $\{4, 9\}$
3. 【2021 年第 1 题】 设集合 $M = \{1, 3, 6\}$, $N = \{3, 4, 5\}$, 则 $M \cap N =$ (C)
- A. $\{1, 4, 6\}$ B. $\{1, 4, 5, 6\}$ C. $\{3\}$ D. $\{1, 3, 4, 5, 6\}$
4. 【2022 年第 1 题】 若集合 $A = \{x|-1 < x < 4, x \in Z\}$, $B = \{x|-2 < x < 1, x \in Z\}$, 则 $A \cap B$ 的元素共有 (A)
- A. 1 个 B. 2 个 C. 3 个 D. 4 个
5. 【2023 年第 1 题】 已知集合 $A = \{-2, 0, 1\}$, 集合 $B = \{x|-2 < x < 1, x \in Z\}$, 则 $A \cup B$ 中元素的个数为 (D)
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 【2024 年第 1 题】已知集合 $M=\{x|-7<x<3\}$, 集合 $N=\{x|-2<x<6\}$, 则 $M\cap N=$ (D)

A. $\{x|-7<x<6\}$ B. $\{x|-7<x<3\}$ C. $\{x|-2<x<6\}$ D. $\{x|-2<x<3\}$

§2 定义域/值域/函数单调性、对称性、奇偶性

1. 【2019 年第 15 题】已知二次函数 $f(x)=ax^2-3a^2x-1$, 若 $f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增,

则 a 的取值范围是 $\underline{0 < a \leq \frac{2}{3}}$

2. 【2020 年第 4 题】函数 $f(x)=\sqrt{3-4x+x^2}$ 的定义域为 (C)

A. R B. $[1, 3]$

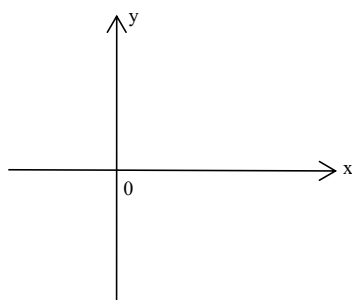
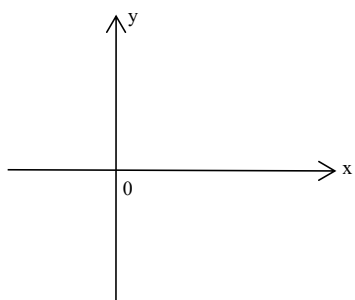
C. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ D. $[0, 1]$

3. 【2020 年第 5 题】函数 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ 图像的对称轴为 (A)

A. $x=1$ B. $x=\frac{1}{2}$ C. $x=-\frac{1}{2}$ D. $x=-1$

4. 【2020 年第 7 题】函数 $f(x) = \ln(-3x^2 + 1)$ 的单调递减区间为 (A)

- A. $(0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ B. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0)$ C. $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ D. $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$



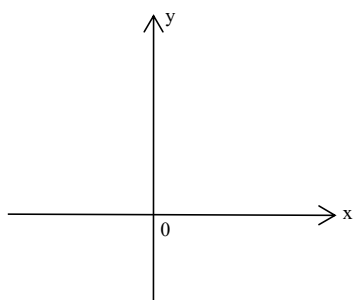
5. 【2021 年第 3 题】下列函数中既是增函数又是奇函数的是 (A)

- A. $y = 3x$ B. $y = \frac{5}{x}$ C. $y = \ln x$ D. $y = -x^2 + 2x$

6. 【2021 年第 6 题】函数 $y = 2 - \sqrt{9 - x^2}$ 的定义域为 (A)

- A. $[-3, 3]$ B. $[-9, 9]$ C. $[3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3]$

7. 【2021 年第 12 题】函数 $y = e^{|x|}$ 的最小值是 1



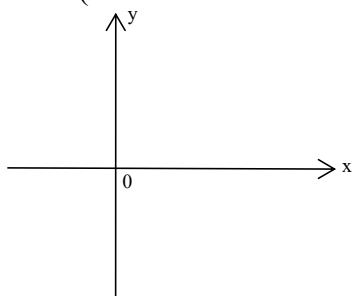
8. 【2022 年第 2 题】函数 $f(x) = \log_2 \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ 的定义域是 (A)

A. $(-1, 3)$

B. $[-1, 3]$

C. $(-3, 1)$

D. $[-3, 1]$



9. 【2022 年第 3 题】下列函数中，为增函数的是 (C)

A. $y = -\ln(x+1)$

B. $y = x^2 - 1$

C. $y = \frac{e^x}{2}$

D. $y = |x-1|$

10. 【2023 年第 2 题】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ \log_3 x, & x > 0. \end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) =$ (B)

A. -1

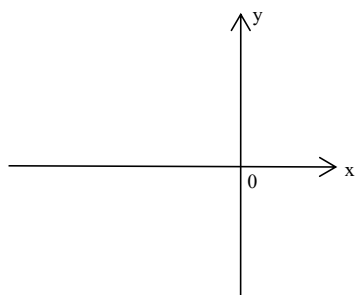
B. 1

C. $\sqrt{3}$

D. 3

11. 【2024 年第 9 题】函数 $y = \log_3(x-2)$ 的定义域是 $x > 2$.

12. 【2024 年第 10 题】函数 $y = -x^2 - 5x + 6$ 的单调递减区间为 $(-5/2, +\infty)$

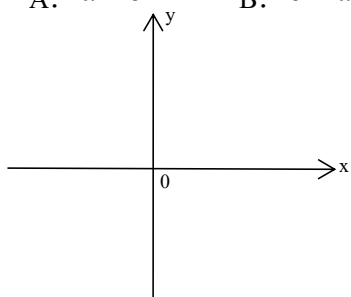


§3 不等式

1. 【2019 年第 5 题】若 $2^{x+5} > \frac{1}{4}$, 则 x 的取值范围为 (A)
A、 $(-7, +\infty)$ B、 $(7, +\infty)$ C、 $(-3, +\infty)$ D、 $(3, +\infty)$

2. 【2020 年第 10 题】已知 $a = 0.2^{0.3}, b = 0.3^{0.3}, c = 0.2^{-0.2}$ 则 (A)

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $a < c < b$

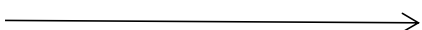


3. 【2020 年第 13 题】不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ 的解集是 $\left\{x \mid 0 < x < \frac{1}{4}\right\}$.

4. 【2021 年第 13 题】不等式 $x^2 - 3x - 10 > 0$ 的解集是 $\{x \mid x < -2 \text{ 或 } x > 5\}$



5. 【2022 年第 10 题】不等式 $|1-x| > 2$ 的解集是 $\{x \mid x < -1 \text{ 或 } x > 3\}$.



§ 4 平面向量

1. 【2019 年第 2 题】 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (1, -3)$, 则 $|\vec{3a} + \vec{b}| =$ (A)

- A、5 B、4 C、3 D、2

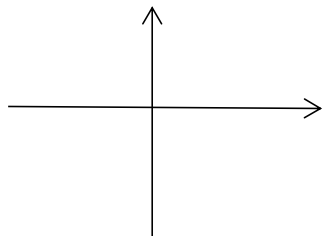
2. 【2020 年 12 题】 已知向量 \vec{a}, \vec{b} , 满足 $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 1$, 且 \vec{a} 与 \vec{b} 的夹角为 150° , 则 $|\vec{b}| = \underline{\sqrt{3}}$.

3. 【2021 年第 14 题】 若向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 5, |\vec{a} + \vec{b}| = 7$, 则 $\vec{a} \cdot \vec{b} = -\frac{15}{2}$ —

4. 【2022 年第 11 题】 若向量 a, b 满足 $|a| = 2, |b| = 3$, 且 a 与 b 的夹角为 120° , 则 $a \cdot b = \underline{-3}$

5. 【2023 年第 7 题】 已知向量 $a = (1, 1), b = (-2, 0)$, 则 a 与 b 的夹角为 (D)

- A. 30° B. 45° C. 120° D. 135°



6. 【2023 年第 6 题】 已知点 $A(2, 2), B(-2, 10)$, 点 C 满足 $\vec{BA} = 2\vec{AC}$, 则 C 的坐标为 (A)

- A. (4, -2) B. (0, 6) C. (-4, 14) D. (-6, 18)

§ 5 三角函数及解三角形

1. 【2019 年第 4 题】已知 $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in Z)$, 则 $\tan \frac{\alpha}{2} =$ (D)

- A. -1 B. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. 1

2. 【2019 年第 10 题】函数 $f(x) = \sin x \cos x + \cos^2 x$ 的最大值为 (B)

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$ C. $\sqrt{2}$ D. $1+\sqrt{2}$

3. 【2019 年第 14 题】在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2, BC=3, AB=4$, 则 $\cos C =$ -1/4

4. 【2019 年第 17 题】已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 成等差数列

(1) 求 B

(2) 求 $\sin A + \sqrt{3} \cos A$ 的最大值

解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中 $A+B+C=180^\circ$ 又 $\because A, B, C$ 成等差数列

$$\therefore A+C=2B \quad \text{即 } B=60^\circ$$

$$(2) \sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 \sin(A+60^\circ) \quad A \in (0^\circ, 120^\circ) \therefore A+60^\circ \in (60^\circ, 180^\circ)$$

$\therefore \sin(A+60^\circ)$ 的最大值为 1

所以 $\sin A + \sqrt{3} \cos A = 2 \sin(A+60^\circ)$ 的最大值为 2

5. 【2020 年第 3 题】函数 $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x$ 的最小周期是 (C)

- A. 2π B. $\frac{3\pi}{2}$ C. π D. $\frac{\pi}{2}$

6. 【2020 年第 6 题】已知 $\tan x = -\frac{1}{3}$, 则 $\sin 2x =$ (D)

- A. $\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{10}$ C. $-\frac{3}{10}$ D. $-\frac{3}{5}$

7. 【2020 年第 17 题】 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , $B = 30^\circ$, $b = c + 1$.

(1) 若 $c = 2$, 求 $\sin C$;

(2) 若 $\sin C = \frac{1}{4}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, 由 $b = c + 1$ 且 $c = 2$, 可得 $b = 3$,

根据正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$, 可得 $\sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{2 \sin 30^\circ}{3} = \frac{1}{3}$.

(2) 由正弦定理可得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin 30^\circ} = \frac{b-1}{\sin C}$,

因为 $\sin C = \frac{1}{4}$, 可得 $b = 2, c = 1$,

由余弦定理可得 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$, 可得 $4 = a^2 + 1 - 2 \times a \times 1 \times \cos 30^\circ$,

即 $a^2 - \sqrt{3}a - 3 = 0$, 解得 $a = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{2}$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{15}}{8}$.

8. 【2021 年第 4 题】若 $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, 则 $\sin x = (D)$

A. $-\frac{1}{4}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $-\frac{2}{3}$ D. $-\frac{3}{4}$

9. 【2021 年第 5 题】 $\sin 168^\circ \cos 18^\circ - \sin 102^\circ \sin 198^\circ = (C)$

A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

10. 【2021 年 17 题】记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知

$$a = 7, b = 8, \cos B = \frac{1}{7}.$$

(1) 求 c ;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积 S 。

解: (1) $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{49 + c^2 - 64}{14c} = \frac{1}{7}$

$$c^2 - 2c - 15 = 0$$

$$\therefore c = 5, \text{ 或 } c = -3 (\text{舍去})$$

(2)

$$\because \cos B = \frac{1}{7}$$

$$\therefore \sin B = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

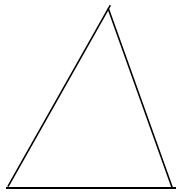
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2} \times 7 \times 5 \times \frac{4\sqrt{3}}{7} = 10\sqrt{3}$$

11. 【2022 年第 4 题】函数 $y = 3 \sin x + 4 \cos x + 1$ 的最小值是 (D)

- A.-7 B.-6 C.-5 D.-4

12. 【2022 年第 7 题】在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $A = 60^\circ$, $AC = 2$, $BC = \sqrt{7}$, 则 $AB =$ (B)

- A.4 B.3 C.2 D.1



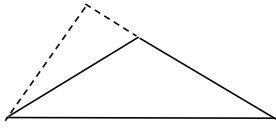
13. 【2022 年第 9 题】若 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta = \underline{\underline{1/3}}$

14. 【2023 年第 4 题】已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$, 则 (C)

- A. $f(x)$ 的最大值为 $\sqrt{3} + 1$ B. $f(x)$ 的最小正周期为 π
C. 曲线 $y=f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称 D. 曲线 $y=f(x)$ 关于点 $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称

14. 【2023 年第 9 题】 $\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \cos 35^\circ \sin 10^\circ = (\frac{\sqrt{2}}{2})$

15. 【2023 年第 11 题】 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = \sqrt{3}, b = 1, C = 30^\circ$, 则 AB 边上的高为 $(\frac{\sqrt{3}}{2})$



17. 【2024 年第 2 题】 函数 $y = \sin 3x \cdot \cos 3x$ 是 (A)

- A. 最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$ 的奇函数 B. 最小正周期为 $\frac{\pi}{3}$ 的偶函数
 C. 最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 的奇函数 D. 最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$ 的偶函数

18. 【2024 年第 13 题】 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \frac{\pi}{3}, AB = 5, \cos A = \frac{1}{7}$

(1) 求 AC ; (2) 点 D 在边 BC 上, 且 $CD = 3$, 求 $\triangle ABD$ 的面积.

13. (18分)

解: (1) $\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1, 0^\circ < A < 180^\circ$, 即 $\sin A > 0$

$$\therefore \sin^2 A + (\frac{1}{7})^2 = 1, \sin A = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$\because A, B, C$ 是三角形三个角

$$\therefore A + B + C = \pi$$

由三角函数诱导公式得 $\sin C = \sin(A + B)$

$$= \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{14}$$

由正弦定理得 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}, \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{5}{\frac{5\sqrt{3}}{14}}$, 解得 $b = 7$, 即 $AC = 7$

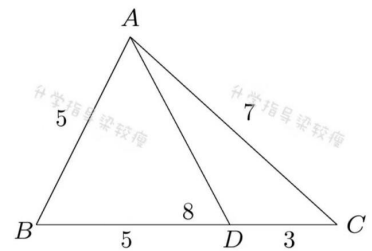
$$(2) \text{ 由余弦定理得 } \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{a^2 + 5^2 - 7^2}{2 \times a \times 5} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a^2 - 24}{10a} = \frac{1}{2}, a^2 - 24 = 5a, a^2 - 5a - 24 = 0, \text{ 解得 } a = 8 \text{ 或 } a = -3 \text{ (舍去)}$$

$$\therefore CD = 3$$

$$\therefore BD = BC - CD = 5$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times |AB| \times |BD| \times \sin B = \frac{1}{2} \times 5 \times 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$



§ 6 数 列

1. 【2019 年第 8 题】等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ，若 $a_5 + a_6 + a_7 = 15$ ，则 $S_{11} = (C)$

A.110 B.80 C.55 D.30

2. 【2019 年第 13 题】已知数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，且 $a_3, 3a_2, a_4$ 成等差数列，则 $\{a_n\}$ 的公比为 2

3. 【2020 年第 2 题】1, 3 的等差中项是 (B)

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

4. 【2020 年第 14 题】等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1 + a_2 = \frac{3}{2}$ ， $a_4 + a_5 = 12$ ，则 $a_3 = \underline{2}$.

5. 【2021 年第 2 题】已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$ ，且 $a_{n+1} = a_n + 3$ ，则 $a_n = (B)$

A. $2n$ B. $3n - 1$ C. $3n - 4$ D. $5n - 3$

6. 【2021 年第 11 题】若 $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列，且 $a_1 + a_3 = 5$ ，则 $a_5 = \underline{\frac{81}{2}}$.

7. 【2022 年第 15 题】

已知函数 $f(x) = \frac{x^3 + x + b}{x}$, $\{a_n\}$ 是等差数列, 且 $a_2 = f(1), a_3 = f(2), a_4 = f(3)$

(1) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和;

(2) 求 $f(x)$ 的极值.

【解析】(1) $a_2 = f(1) = 2 + b, a_3 = f(2) = \frac{10 + b}{2}, a_4 = f(3) = \frac{30 + b}{3}$

$\therefore \{a_n\}$ 为等差数列, 即 $a_2 + a_4 = 2a_3$ 解得

$$b = -6$$

$$\therefore a_1 = -10, d = 6$$

$$\therefore a_n = 6n - 16$$

$$\therefore S_n = \frac{n(-10 + 6n - 16)}{2} = 3n^2 - 13n$$

$$(2) f(x) = \frac{x^3 + x - 6}{x}$$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 1)x - (x^3 + x - 6)}{x^2} = \frac{2x^3 + 6}{x^2}$$

$$f'(x) = 0$$

$$x = -\sqrt[3]{3}$$

x	$(-\infty, -\sqrt[3]{3})$	$-\sqrt[3]{3}$	$(-\sqrt[3]{3}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\searrow	极 小 值 $f(-\sqrt[3]{3}) = 9\sqrt[3]{9} + 1$	\nearrow

8. 【2023 年第 3 题】设 S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_3 = 5, S_6 = 36$, 则 $a_{10} =$ (B)

A. 17 B. 19 C. 21 D. 23

9. 【2024 年第 5 题】在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 = 324, a_3 + a_4 = 36$, 则 $a_5 + a_6 =$ (B)

A. 2 B. 4 C. 9 D. 252

10. 【2024 年第 11 题】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S = n^2 + n$, 则其通项 $a_n =$ 2n

§7 解析几何

1. 【2019年第3题】点 $(1, -1)$ 到直线 $x - 2y - 8 = 0$ 的距离是 (B)

A. 5 B. $\sqrt{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{1}{5}$

2. 【2019年第9题】若方程 $x^2 + y^2 + 4ax - 2y + 5a = 0$ 表示的曲线是圆, 则 a 的取值范围是 (C)

A. $(\frac{1}{4}, 1)$ B. $(-1, \frac{1}{4})$ C. $(-\infty, \frac{1}{4}) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{4}, +\infty)$

3. 【2019年第12题】双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的离心率是 $(\frac{\sqrt{5}}{2})$

4. 【2019年第18题】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 焦距是4,

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $(-3, 0)$ 且斜率为 k 的直线 l 与 C 相交于 A, B 两点, O 为坐标原点, 当 $AO \perp OB$ 时, 求 k 的值

解: (1) $\because \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}, 2c = 4,$

$$\therefore a = \sqrt{6}$$

$$\text{又 } a^2 = b^2 + c^2$$

$$\therefore b = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{椭圆方程为 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$$

(2) 设直线 $l: y = k(x + 3), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x+3) \\ \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{得 } (1+3k^2)x^2 + 18k^2x + 27k^2 - 6 = 0$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-18k^2}{1+3k^2}, x_1x_2 = \frac{27k^2 - 6}{1+3k^2}$$

$$\because AO \perp OB$$

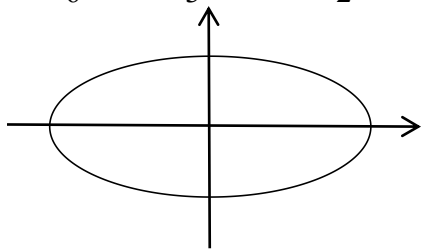
$$\therefore x_1x_2 + y_1y_2 = 0$$

$$y_1y_2 = k^2[3(x_1 + x_2) + x_1x_2 + 9] = \frac{3k^2}{1+3k^2}$$

$$x_1x_2 + y_1y_2 = \frac{27k^2 - 6}{1+3k^2} + \frac{3k^2}{1+3k^2} = \frac{30k^2 - 6}{1+3k^2} = 0 \text{ 即 } k = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

5. 【2020 年第 8 题】若一个椭圆的两个焦点三等分它的长轴，则该椭圆的离心率为（ B ）

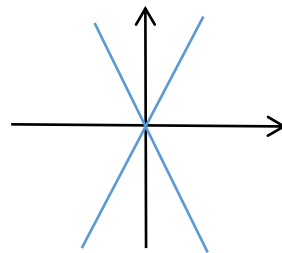
- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{3}$



6. 【2020 年第 9 题】双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的两条渐近线的倾斜角分别为 α 和 β ,

则 $\cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ (D)

- A. 1 B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 0



7. 【2020 年第 18 题】已知抛物线 C 的顶点在原点，焦点为 $F(-1,0)$.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 P 为 C 的准线上一点， Q 为直线 PF 与 C 的一个交点且 F 为 PQ 的中点，求 Q 的坐标及直线 PQ 的方程.

解: (1) 由题可设抛物线方程为 $y^2 = -2px$, 又 \because 焦点 $(-1, 0)$ 可得 $-\frac{p}{2} = -1$

$$\therefore p = 2, \therefore y^2 = -4x$$

(2) 设点 P 坐标为 $(1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$,

$$\because F \text{ 为 } PQ \text{ 中点}, \therefore \frac{1+x_2}{2} = -1, \therefore x_2 = -3$$

$\because Q$ 在抛物线上, 将 $x_2 = -3$ 代入得 $y_2 = \pm 2\sqrt{3}$,

$$\therefore Q(-3, 2\sqrt{3}) \text{ 或 } (-3, -2\sqrt{3})$$

当 $y_2 = 2\sqrt{3}$ 时, 由 $\frac{y_1+y_2}{2} = 0$ 得 $y_1 = -2\sqrt{3}$;

当 $y_2 = -2\sqrt{3}$ 时, 由 $\frac{y_1+y_2}{2} = 0$ 得 $y_1 = 2\sqrt{3}$;

$$\therefore \text{点 } P(1, 2\sqrt{3}) \text{ 或 } (1, -2\sqrt{3}); \therefore k_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{直线方程 } \sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} = 0 \text{ 或 } \sqrt{3}x + y + \sqrt{3} = 0$$

8. 【2021 年第 7 题】以双曲线 $C: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ 的中心为顶点, C 的左焦点为焦点的抛物线的

方程为 (D)

A. $y^2 = 20x$

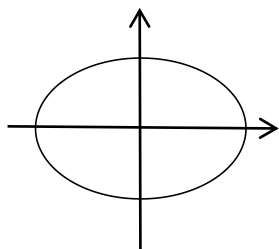
B. $y^2 = 10x$

C. $y^2 = -10x$

D. $y^2 = -20x$

9. 【2021 年第 15 题】若椭圆 C 的焦点为 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$, 过 F_1 的直线交 C 于 A, B 两点,

且 $\triangle ABF_2$ 的周长为 12, 则 C 的方程为 $(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1)$



10. 【2021 年第 18 题】已知 $\odot M : (x-a)^2 + (x-a^2)^2 = 4$

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $\odot M$ 截直线 $x-y-2=0$ 所得弦的长;

(2) 求点 M 的轨迹方程。

解: (1) 圆心为 $(1,1)$, 半径为 $r=2$

$$\text{圆心到直线的距离 } d = \frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{弦长为 } 2\sqrt{r^2-d^2} = 2\sqrt{2}$$

$$(2) M(x, y), x = a, y = a^2,$$

所以 M 的轨迹方程为 $x^2 = y$

11. 【2022 年第 5 题】已知 O 为坐标原点, 点 $A(2,2)$, M 满足 $|AM| = 2|OM|$,

则点 M 的轨迹方程为 (A)

A. $3x^2+3y^2+4x+4y-8=0$

B. $3x^2+3y^2-4x-4y-8=0$

B. $x^2+y^2+4x+4y-4=0$

D. $x^2+y^2-4x-4y-4=0$

12. 【2022 年第 14 题】

已知 O 是坐标原点, 双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 与抛物线 $D: y^2 = \frac{1}{4}x$ 交于 A, B 两点, $\triangle AOB$ 的面积为 4.

(1) 求 C 的方程;

(2) 设 F_1, F_2 为 C 的左、右焦点, 点 P 在 D 上, 求所 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 的最小值.

$$(1) \text{ 设 } A(m, \frac{1}{2}\sqrt{m}), B(m, -\frac{1}{2}\sqrt{m}) \quad |AB| = \sqrt{m} \quad S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}m \cdot \sqrt{m} = 4, \text{ 解得 } m = 4$$

$$A(4,1)$$

即

$$\therefore \frac{16}{a^2} - 1 = 1, \text{ 即 } a^2 = 8 \quad \therefore \frac{x^2}{8} - y^2 = 1$$

$$(2) c^2 = a^2 + b^2 = 8 + 1 = 9$$

$$c = 3$$

$$\text{设 } P(4n^2, n)$$

$$\overrightarrow{PF_1} = (-3 - 4n^2, -n)$$

$$\overrightarrow{PF_2} = (3 - 4n^2, -n)$$

$$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = (-3 - 4n^2) \cdot (3 - 4n^2) + (-n) \cdot (-n) = 16n^4 - 9 + n^2 = 16\left(n^2 + \frac{1}{32}\right)^2 - \frac{1}{64} - 9$$

$$\therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} \text{ 的最小值为 } -9$$

13. 【2023 年第 12 题】 已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点, 过 F 的直线与 C 交于 A, B 两点, 若 $|AF|=2|BF|$, 则 $|AB|=$ 9/2

14. 【2023 年第 15 题】 已知 O 是坐标原点, 点 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$ 在椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$ 上

(1) 求 C 的方程 (2) 设 M, N 是 C 上两点, 且 $OM \perp ON$, 证明 $\frac{1}{|OM|^2} + \frac{1}{|ON|^2} = \frac{5}{4}$

15. 【2024 年第 3 题】 双曲线 $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 的焦点到渐近线的距离为 (C)

A. 10 B. 8 C. 6 D. $\frac{5}{4}$

16. 【2024 年第 4 题】 抛物线 $x^2 = 2y$ 的焦点坐标为 (D)

A. $(\frac{1}{8}, 0)$ B. $(\frac{1}{2}, 0)$ C. $(0, \frac{1}{8})$ D. $(0, \frac{1}{2})$

17. 【2024 年第 14 题】已知椭圆 C 的中心为坐标原点，焦点 F_1 和 F_2 在 x 轴上，离心率为 $\frac{5}{7}$ ，点 $(0, 2\sqrt{6})$ 在 C 上.

(1) 求 C 的方程: $(\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{24} = 1)$

(2) 设点 M 在 C 上, $\angle F_1MF_2 = 90^\circ$, 求 $\triangle F_1MF_2$ 的面积. (24)

§ 8 二项式定理

1. 【2019 年第 11 题】(11) $(1+2x)^7$ 的展开式中 x^2 的系数是 84 ;

2. 【2020 年第 15 题】 $(x-3y)^5$ 的展开式中 x^2y^3 的系数为 -270 .

3. 【2021 年第 8 题】 $\left(x^2 - \frac{1}{2x}\right)^6$ 的展开式中的常数项为 B

- A. $-\frac{15}{8}$ B. $\frac{15}{16}$ C. $-\frac{15}{16}$ D. $\frac{15}{8}$

4. 【2023 年第 6 题】 $\left(x - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)^{10}$ 的展开式中 x^7 的系数为 (A)

- A. 180 B. 45 C. - 45 D. - 180

5. 【2024 年第 8 题】已知 $(2x - 1)^7 = a_0x^7 + a_1x^6 + \cdots + a_6x + a_7$, 则 $a_0 + a_1 + \cdots + a_7 =$ (D)

- A. -3^7 B. $-3^7 + 1$ C. 0 D. 1

§ 9 概率统计

1. 【2019 年第 7 题】从 1, 2, 3, 4, 5 这 5 个数中, 任取 2 个不同的数, 其和为偶数的概率是 (D)

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{2}{5}$

3. 【2020 年第 11 题】从 1,2,3,4,5 中任取 3 个不同数字，这 3 个数字之和是偶数的概率为 $\frac{3}{5}$.

3. 【2021 年第 9 题】从 4 名女生、3 名男生中任选 4 人做自愿者，则其中至少有 1 名男生的不同选法共有(B)

- A. 12 种 B. 34 种 C. 35 种 D. 168 种

4. 【2021 年第 9 题】从数字 1， 2， 3， 4， 5 中随机取 3 个不同的数字，其和为偶数的概率为 $\frac{3}{5}$

5. 【2022 年第 6 题】从 3 名男队员和 3 名女队员中各挑选 1 名队员，则不同的挑选方法共有 (B)

- A. 6 种 B. 9 种 C. 12 种 D. 15 种

6. 【2022 年第 13 题】

某射击运动员各次射击成绩相互独立，已知该运动员一次射击成绩为 10 环的概率为 0.8,9 环的概率为 0.1，小于 9 环的概率为 0.1。该运动员共射击 3 次。

- (1) 求该运动员恰有 2 次成绩为 9 环的概率；
- (2) 求该运动员 3 次成绩总和不小于 29 环的概率。

(1) 设该运动员恰有两次成绩为 9 环的事件为 A

$$P(A) = C_3^2 (0.1)^2 0.9 = 3 \times 0.01 \times 0.9 = 0.027$$

(2) 设该运动员 3 次成绩总和不小于 29 环的事件为 B

$$P(B) = 0.8^3 + C_3^1 \times 0.1 \times 0.8^2 = 0.704$$

7. 【2023 年第 13 题】甲、乙、丙 3 人参加国防知识竞赛，设甲、乙、丙在竞赛中获得满分的

的概率分别为 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, 且 3 人的竞赛成绩相互独立。

- (1) 求恰有 2 人获得满分的概率
- (2) 求至少有 1 人获得满分的概率

13. (18 分)

甲、乙、丙 3 人参加国防知识竞赛，设甲、乙、丙在竞赛中获得满分的概率分别为 $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, 且 3 人的竞赛成绩相互独立

- (1) 求恰有 2 人获得满分的概率
- (2) 求至少有 1 人获得满分的概率

解：(1) 恰有 2 人获得满分的概率 $P = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{18}$

(2) 全都不获得满分的概率 $P = \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}$

至少 1 人获得满分的概率 $P = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

8. 【2024 年第 7 题】从甲、乙、丙、丁 4 个人中任选 2 人组成志愿小组，则甲被选中的概率为 (C)

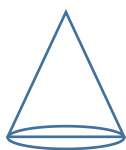
- A. 1 B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $\frac{1}{3}$

8. 【2024 年第 12 题】甲、乙等 5 名运动员排成一排，则甲、乙相邻的排法共有 48 种.

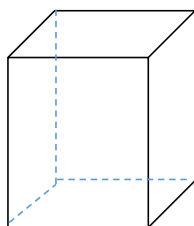
§ 10 立体几何

1. 已知圆锥的母线长为 4，底面周长为 2π ，则圆锥的表面积为 (B)

- A、 4π B、 5π C、 8π D、 9π



2. 【2019 年第 16 题】已知正四棱柱 $ABCD-A'B'C'D'$ 的底面边长为 2，点 P 是底面 $A'B'C'D'$ 的中心，且点 P 到直线 AB 的距离为 3，则 ΔPAC 的面积为 4



3. 【2019 年第 19 题】如图，四棱柱 P-ABCD 的底边是边长为 2 的正方形，侧面 PAD⊥底面 ABCD，且 PA=PD=√2，E、F 分别是 PC，BD 的中点

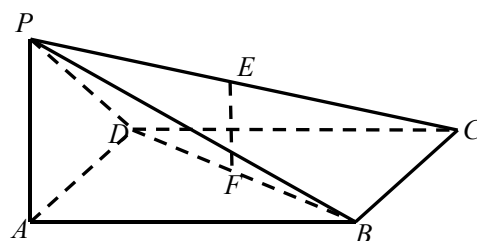
(1) 证明：EF//平面 PAD；

(2) 求二面角 P-DB-A 的正切值

解：(1)证明:连接 AC，且 F 是底面正方形 ABCD 边 BD 的中点

∴ F 也是 AC 的中点

又 ∵ E 是 PC 的中点 ∴ EF//PA, 又 PA ⊂ 面 PAD



∴ EF//面PAD

(2) ∵ PA = PD, 取 AD 中点 M

∴ PM ⊥ AD, 又面 PAD ⊥ 底面 ABCD ∴ PM ⊥ 底面 ABCD

∵ 底面 ABCD 是正方形, ∴ AF ⊥ BD 取 DF 中点 N

∴ MN ⊥ DF, 连接 PN, ∴ ∠PNM 为所求角的平面角

$$PM = 1, MN = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan \angle PNM = \frac{PM}{MN} = \sqrt{2}$$

4. 【2020 年第 16 题】若平面 α, β, γ 满足 $\alpha \perp \gamma, \alpha \cap \gamma = a, \beta \perp \gamma, \beta \cap \gamma = b$, 有下列四个判断:

① $\alpha \parallel \beta$

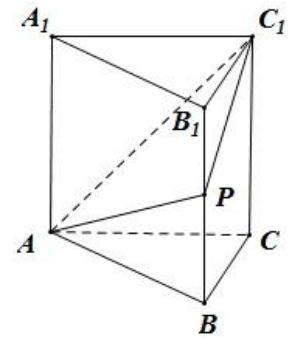
② 当 $a \parallel \beta$ 时, $a \parallel b$

③ $a \perp \beta$

④ 当 $\alpha \cap \beta = c$ 时, $c \perp \gamma$

其中, 正确的是__②④___. (填写所有正确判断的序号)

5. 【2020 年第 19 题】如图，正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， P 为 BB_1 上一点， $\triangle APC_1$ 为等腰直角三角形。



- (1) 证明 P 为 BB_1 的中点；
- (2) 证明：平面 $APC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 ；
- (3) 求直线 PA 与平面 ABC 所成角的正弦值

解：(1) 证明：由题意可得 $\triangle ABP$ 与 $\triangle C_1B_1P$ 为直角三角形，

又 $\because \triangle APC_1$ 为等腰直角三角形， $\therefore AP = PC_1$ ，

又 \because 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 为正三棱柱， $\therefore AB = B_1C_1$

$\therefore Rt\triangle ABP \cong Rt\triangle C_1B_1P$ ， $\therefore BP = B_1P$ ， $\therefore P$ 为 BB_1 中点。

(2) 证明：取 AC_1 中点 H ，连接 PH ，又 $\because \triangle APC_1$ 为等腰直角三角形，

$\therefore PH \perp AC_1$ ，作 A_1C_1 中点 O ，连接 B_1O 、 HO ，

则四边形 B_1OHP 为平行四边形， $\therefore PH \parallel B_1O$ ， $PH = B_1O$

又 $\because \triangle AB_1C_1$ 为正三角形， O 为 A_1C_1 中点， $\therefore B_1O \perp A_1C_1$ ， $\therefore PH \perp A_1C_1$

$AC_1 \cap A_1C_1 = C_1$ ， $\therefore PH \perp$ 平面 ACC_1A_1 ，又 $PH \subset$ 平面 APC_1 ， \therefore 平面 $APC_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 。

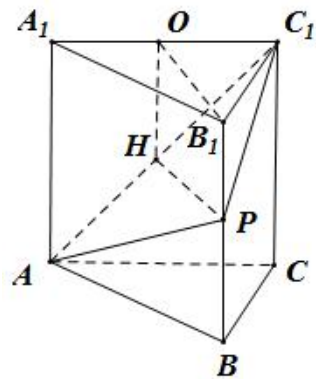
(3) 由题意可知， $\angle PAB$ 为直线 PA 与平面 ABC 所成角，故设

$AB = 2$ ，则 $B_1O = \sqrt{3} = PH$

$\because \triangle APC_1$ 为等腰直角三角形， $\therefore AC_1 = 2\sqrt{3}$ ，

$AA_1 = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 - 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，则 $BP = \sqrt{2}$

$AP = \sqrt{2^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{6}$ ， $\therefore \sin \angle PAB = \frac{BP}{AP} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$



6. 【2021 年第 10 题】已知 m, n 为两条直线， α, β 为两个平面，下述四个结论：

- ①若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, \alpha \parallel \beta$ ，则 $m \parallel n$ ；
- ②若 $m \parallel \alpha, n \parallel \beta, \alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp n$ ；
- ③若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \parallel \beta$ ，则 $m \parallel n$ ；
- ④若 $m \perp \alpha, n \perp \beta, \alpha \perp \beta$ ，则 $m \perp n$ 。

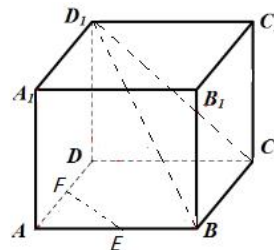
其中正确结论的编号是(D)

- A.①② B.②④ C.①④ D.③④

7. 【2021 年第 19 题】如图，正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E, F 分别为 AB, AD 的中点。

(1) 证明：直线 $EF \parallel$ 平面 CB_1D_1 ；

(2) 设 $AB = 2$ ，求三棱锥 $B - CB_1D_1$ 的体积。



(1) 证明：连接 B_1D_1, BD

在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $B_1D_1 \parallel BD$

$\because E, F$ 分别为 AB, AD 的中点

$\therefore EF \parallel BD \parallel B_1D_1$

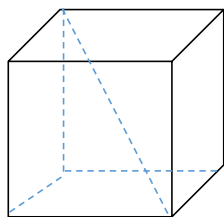
$B_1D_1 \subset$ 面 B_1D_1D $EF \parallel$ 面 B_1D_1D

(2) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中 $C_1D_1 \perp$ 面 B_1BCC_1

$$\therefore V_{B-CB_1D_1} = V_{D-BB_1C} = \frac{1}{3} |C_1D_1| \cdot S_{\triangle BB_1C} = \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = \frac{4}{3}$$

8. 【2023 年第 5 题】正方体的表面积为 6，其顶点都在同一球面上，则该球的体积为 (A)

- A. $\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$ B. π C. $\frac{3\sqrt{3}\pi}{2}$ D. 3π

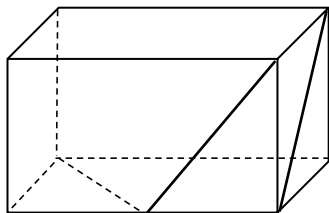


9. 【2023 年第 8 题】正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 底面三角形的边长为 1，点 P 为 AB 中点， $PC = PA_1$ ，则 (C)

- A. $AA_1 = 1$ B. $A_1C = \frac{\sqrt{3}}{2}$
 C. $\tan PAC_1 = 1$ D. $\triangle AB_1C$ 的面积为 $\frac{\sqrt{5}}{2}$

10. 【2022 年第 8 题】长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, O 是 AB 的中点, 且 $OD=OB_1$, 则(C)

- A. $AB=CC_1$ B. $AB=BC$ C. $\angle CBC_1=45^\circ$ D. $\angle BDB_1=45^\circ$



11. 【2022 年第 12 题】设 α, β, γ 是三个平面, 有下列四个命题:

①若 $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \perp \gamma$

②若 $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma$, 则 $\alpha \parallel \gamma$

③若 $\alpha \perp \beta, \beta \parallel \gamma$, 则 $\alpha \perp \gamma$

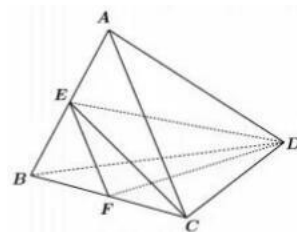
④若 $\alpha \parallel \beta, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha \perp \gamma$

其中所有真命题的序号是__②_③__

12. 【2024 年第 15 题】在四面体 $ABCD$ 中, 点 E, F 分别为 AB, BC 的中点.

(1)证明: $AC \parallel$ 平面 DEF ;

(2)求四面体 $CDEF$ 的体积与四面体 $ABCD$ 的体积的比值.



15. (18分)

证明: (1) $\because E, F$ 分别为 AB, BC 的中点

$\therefore EF$ 为 $\triangle ABC$ 中位线, 即 $EF \parallel AC$

$\because EF \subset$ 平面 $DEF, AC \not\subset$ 平面 DEF

$\therefore AC \parallel$ 平面 DEF

(2) $\because F$ 为 BC 中点

$$\therefore S_{\triangle CDF} = \frac{1}{2} S_{\triangle BCD}$$

以 CDF 为底面, 设四面体 $EFCD$ 高为 h_1

以 BCD 为底面, 设四面体 $ABCD$ 高为 h_2

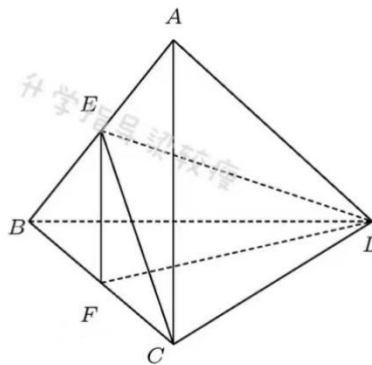
$\because E$ 是 AB 中点

$$\therefore h_1 = \frac{1}{2} h_2$$

$$\text{四面体 } CDEF \text{ 体积 } V_1 = \frac{1}{3} \times S_{\triangle CDF} \times h_1$$

$$\text{四面体 } ABCD \text{ 体积 } V_2 = \frac{1}{3} \times S_{\triangle ABC} \times h_2$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4}$$



§11 导数

1. 【2023 年第 10 题】 已知函数 $f(x) = mx^3 - (m+1)x^2$ 在区间 $(1, +\infty)$ 单调递增, 则 m 的取值范围是_____

解: $f'(x) = 3mx^2 - 2(m+1)x \geq 0, m(3x^2 - 2x) > 2x, m > \frac{2x}{3x^2 - 2x} = \frac{2}{3x-2}$, 右式当

$x > 1$ 的取值范围是 $(0, 1)$, 所以 m 的取值范围是 $m \geq 2$.

2. 【2023 年第 14 题】已知函数 $f(x) = \frac{x^2+ax}{2x^2+1}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行.

(1) 求 a (2) 求 $f(x)$ 的极值

14. (18 分)

已知函数 $f(x) = \frac{x^2+ax}{2x^2+1}$, 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线与直线

$2x - y + 1 = 0$ 平行

(1) 求 a

(2) 求 $f(x)$ 的极值

解: (1) $f(x) = \frac{x^2+ax}{2x^2+1}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+a)(2x^2+1) - (x^2+ax) \times 4x}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{4x^3+2x+2ax^2+a-4x^3-4ax^2}{(2x^2+1)^2} \\ &= \frac{-2ax^2+2x+a}{(2x^2+1)^2} \end{aligned}$$

$2x - y + 1 = 0, y = 2x + 1$

若切线斜率与直线平行, 则切线在点 $(0, f(0))$ 处的斜率 $k = 2$

即 $f'(0) = 2, \frac{a}{(0+1)^2} = 2$, 解得 $a = 2$

(2) 由 (1) $a = 2$ 得, $f(x) = \frac{x^2+2x}{2x^2+1}, f'(x) = \frac{-4x^2+2x+2}{(2x^2+1)^2}$

令 $f'(x) = 0$, 即 $\frac{-4x^2+2x+2}{(2x^2+1)^2} = 0, \frac{-2(2x^2-x-1)}{(2x^2+1)^2} = 0,$

$\frac{-2(2x^2-x-1)}{(2x^2+1)^2} = 0, \frac{-2(x-1)(2x+1)}{(2x^2+1)^2} = 0$, 解得 $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}$

令 $f'(x) < 0$, 解得 $x < -\frac{1}{2}$ 或 $x > 1$; 令 $f'(x) > 0$, 解得 $-\frac{1}{2} < x < 1$

$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$-\frac{1}{2}$	$(-\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
\searrow	极小值	\nearrow	极大值	\searrow

极大值为 $f(1) = \frac{1^2+2 \times 1}{2 \times 1^2+1} = 1$; 极小值为 $f(-\frac{1}{2}) = \frac{(-\frac{1}{2})^2+2 \times (-\frac{1}{2})}{2 \times (-\frac{1}{2})^2+1} =$

$-\frac{1}{2}$

