导数的概念及其应用

知识点·梳理

1、导数的概念及其意义

①导数的定义

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta_x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

②导数的几何意义

$f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 表示 $f(x)$ 在 x_0 处切线的斜率

2、导数的运算

①基本初等函数的导数公式

函数	导数
$f(x)=C$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^{\alpha}$	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$ （α 为常数）
$f(x)=a^{x}$	$f'(x)=a^{x}\ln a\,(a>0,且a\neq 1)$
$f(x)=\log_a x$	$f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}(a>0且a\neq 1)$
$f(x)=e^{x}$	$f'(x)=e^{x}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$

②导数的四则运算法则

1） $\left[f(x)\pm g(x)\right]'=f'(x)\pm g'(x)$；（求导之后再相加减）

2） $\left[f(x)g(x)\right]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$；（前导后不导加上前不导后导）

3） $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}(g(x)\neq 0)$；（分母的平方分之上导下不导减去上不导下导）

4）复合函数的导数:若 $y=f(u),u=g(x)$，则 $y_x'=y_u'\cdot u_x'$.

3、函数的单调性与导数

①函数的单调性与导数的关系，函数 $y=f(x)$ 在某个区间 (a,b) 内可导,

1）如果在区间(a,b)上$f'(x)\geq 0$恒成立，则$f(x)$在区间(a,b)内单调递增；

2）如果在区间(a,b)上$f'(x)\leq 0$恒成立，则$f(x)$在区间(a,b)内单调递减；

②求函数单调区间的步骤

1）确定函数$f(x)$的定义域;

2）求导函数$f'(x)$;

3）解不等式$f'(x)>0$,解集在定义域内的部分为单调递增区间；

4）解不等式$f'(x)<0$,解集在定义域内的部分为单调递减区间；

易错点：若所求函数的单调区间不止一个，这些区间之间不能用“∪”及“或”连接，只能用“，”“和”隔开.

4、函数的极值与导数

1）函数的极值与导数的关系

1°如果$f(x)$在x_0两侧满足“左增右减”，则x_0是$f(x)$的极大值点，$f(x_0)$是极大值；

2°如果$f(x)$在x_0两侧满足“左减右增”，则x_0是$f(x)$的极小值点，$f(x_0)$是极小值.

2）求可导函数$f(x)$的极值的步骤

1°求函数的定义域;

2°求导函数$f'(x)$;

3°令导函数$f'(x)>0$（或$f'(x)=0$）求单调区间;

4°根据单调性下结论并求出极值.

5、函数的最值与导数

1）求函数$f(x)$的最大值与最小值的步骤：

1°求$f(x)$在$[a,b]$内的极值;

2°求$f(x)$在$[a,b]$的端点值;

3°将极值与端点值的大小进行比较，其中最大的一个是最大值，最小的一个是最小值，从而得出函数$f(x)$在$[a,b]$上的最值.

重点题型·归类精讲

题型一 求具体函数的导数

【例 1-1】（2005 年真题）函数 $y=x^3+\ln x$ 的导数 $y'=$___

【变式 1】求下列函数的导数

（1） $y=2x^3-3x^2+5$ （2） $y=2^x+\log_2 x$ （3） $y=2^x\ln x$ （4） $y=\dfrac{x^2}{(2x+1)^3}$

【变式 2】求下列函数的导数

(1) $y=\ln x+\dfrac{1}{x}$； (2) $y=\left(2x^2-1\right)\left(3x+1\right)$； (3) $y=x-\dfrac{1}{2}\sin x$； (4) $y=\dfrac{\cos x}{e^x}$.

【变式 3】求下列函数的导数

(1) $y=x^5-x^3+\cos x$ ； (2) $y=\lg x-e^x$； (3) $f(x)=x^2+\sin x$； (4) $g\left(x\right)=x^3-\dfrac{3}{2}x^2-6x+2$ ；

(5) $y=x^2+x\ln x$； (6) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$； (7) $y=\dfrac{e^x}{x}$； (8) $y=(2x^2-1)(3x+1)$.

【变式 4】已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x+a}{e^x}$，若 $f'\left(0\right)=2$，则 $f\left(0\right)=$____________.

【变式 5】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x+a}$，若 $f'\left(1\right)=\dfrac{1}{3}$，则 $a=$_______________.

题型二 导数与函数切线方程--求具体函数在某一点的切线方程

【例 2-1】（2018 年真题）曲线 $y=2x^2-x^3$ 在点 $\left(2,0\right)$ 处的切线方程是___

【变式 1】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^3-1}{x}$ 的图象在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为（ ）

A． $y=3x-3$ B． $y=2x-2$ C． $y=3x-2$ D． $y=2x-1$

【变式 2】函数 $f(x)=\ln x+3x-1$ 的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是（ ）

A． $4x-y+2=0$ B． $x+4y+2=0$

C． $x-4y-2=0$ D． $4x-y-2=0$

【变式 3】曲线 $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ 在 $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$ 处的切线斜率为（ ）

A． $\dfrac{1}{4}$ B． $\dfrac{3}{4}$ C． 1 D． $\dfrac{5}{4}$

【变式 4】已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{x}-2x+\ln x$，则函数 $f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程为（ ）

A． $2x+y-2=0$ B． $2x-y-1=0$

C． $2x+y-1=0$ D． $2x-y+1=0$

【变式 5】函数 $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln x$.的图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线的斜率为____________.

【变式 6】曲线 $f(x)=x^2-\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为_______.

题型三　导数与函数切线方程--已知切线求参数

【例 3-1】(2023 年真题) 已知函数 $f(x)=\frac{x^2+ax}{2x^2+1}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行。(1)求 a

【变式 1】已知曲线 $y=x^3+2ax^2+x+b$ 在点 $(1,0)$ 处的切线的倾斜角为 $\frac{3\pi}{4}$，则 $a+b=$（　　）

A. $-\frac{3}{4}$　　B. $-\frac{5}{4}$　　C. -2　　D. $-\frac{11}{4}$

【变式 2】曲线 $y=x-\frac{2}{x}$ 在 $x=1$ 处的切线的倾斜角为 α，则 $\frac{\cos 2\alpha}{1+\tan\alpha}=$（　　）

A. -1　　B. $-\frac{1}{5}$　　C. $\sqrt{3}$　　D. 2

【变式 3】已知函数 $f(x)=x^2-m\ln x+2x$ 的图象在点 $\left(\frac{1}{2},f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ 处的切线与直线 $x+2y=0$ 垂直，则 $m=$

（　　）

A. $\frac{5}{4}$　　B. $-\frac{5}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $-\frac{1}{2}$

【变式 4】若曲线 $y=x^3+ax$ 在点 $(1,a+1)$ 处的切线方程为 $y=7x+m$，则 $m=$（　　）

A. 3　　B. -3　　C. 2　　D. -2

【变式 5】直线 $y=2x+t$ 与曲线 $y=2\ln x$ 相切，则实数 t 的值为_________　.

【变式 6】函数 $f(x)=2\ln x+\frac{1}{2}ax^2$ 的图象在 $x=1$ 处的切线倾斜角为 150°，则实数 $a=$_______.

题型四　导数与函数单调性的运用--无参函数求单调区间

【例 1】求下列函数的单调区间.

（1）$f(x)=x^3-3x+1$；（2）$y=x+\frac{2}{x}$.（3）$y=\frac{2}{3}x^3-2x^2+3$.

【变式 1】(1) 函数 $f(x)=x\ln x$ 的单调递减区间是（　　）

A. $\left[0,\frac{1}{e}\right]$　　B. $\left(0,\frac{1}{e}\right]$　　C. $(0,e]$　　D. $[e,+\infty)$

（2）设函数 $f(x)=(x-2)e^x$，则其单调增区间是（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$(-\infty,2)$

C．（1，+∞）　　D．$(2+\infty)$

【变式 2】函数 $f(x)=2x-5\ln x+\frac{3}{2}x^2$ 的单调递减区间是（　　）

A．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(0,\frac{3}{2}\right)$

C．$(1,+\infty)$　　D．$(0,1)$

【变式 3】函数 $f(x)=-\ln x+2x^2$ 的单调递增区间是（　　）

A．$\left(-\frac{1}{2},0\right)$和$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ B $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$和$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ C $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ D$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

【变式 4】设 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln x$，则 $f(x)$ 的单调递减区间为（　　）

A．$(-1,1)$　　B．$(0,1)$　　C．$[0,+\infty)$　　D．$(1,+\infty)$

【变式 5】函数 $f(x)=x-\ln x$ 的单调递减区间为（　　）

A．$(0,1)$　　B．$(0,+\infty)$　　C．$(1,+\infty)$　　D．$(-\infty,1)$

题型五　导数与函数单调性的运用--已知单调性求参数

【例 5-1】（2023 年真题）已知函数 $f(x)=mx^3-(m+1)x^2$ 在区间 $(1,+\infty)$ 单调递增，则 m 的取值范围是____________.

【变式 1】若函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+x$ 存在递减区间，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$[-1,1]$　　B．$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

C．$(-1,1)$　　D．$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

【变式 2】设函数 $f(x)=\ln x-ax^2$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\frac{1}{2}\right]$　　B．$\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C．$(0,1]$　　D．$[1,+\infty)$

【变式 3】若函数 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 的单调递减区间为(－1，3)，则 $b+c=$（　　）

A．－12　　B．－10　　C．8　　D．10

【变式 4】函数 $f(x)=2x^3-ax+6$ 的一个单调递增区间为 $[1,+\infty)$，则减区间是（　　）

A．$(-\infty,0)$　　B．$(-1,1)$　　C．$(0,1)$　　D．$(-\infty,1)$，$(0,1)$

题型六　导数与函数极值的相关问题--求函数极值（无参）

【例 6-1】(2023 年)已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+ax}{2x^2+1}$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线与直线 $2x-y+1=0$ 平行。

(1)求 a （$a=2$）

(2)求 $y=f(x)$ 的极值

【例 6-2】(2022 年）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^3+x+b}{x}$，$\{a_n\}$ 是等差数列，且 $a_2=f(1),a_3=f(2),a_4=f(3)$.

(1)求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和；

(2)求 $f(x)$ 的极值。

【例 6-3】(2017 年真题）已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}$

(1)若 $f(x)>0$，求 x 的取值范围

(2)求 $f(x)$ 的极小值

【变式 1】已知函数 $f(x)=(x^2-x+1)e^x$（e 为自然对数的底数)，则函数 $f(x)$ 的极小值为（　）

A．$\dfrac{1}{e}$　　B．e　　C．e^2　　D．1

【变式 2】求下列函数的极值，并画出大致图象.

(1) $y=3x-x^3$；

(2) $y=x^4-6x^3+21x^2-6$.

【变式 3】已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的方程；

（2）求函数 $f(x)$ 的极值；

题型七　导数与函数极值的相关问题--已知极值求参数

【例 1】已知 a 为函数 $f(x)=2\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-3x$ 的极小值点，则 $a=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．$\ln 2$

【例 2】若函数 $f(x)=x^3+ax^2+3x-9$ 在 $x=-3$ 处取得极值，则 $a=$（　　）

A．2　　B．3　　C．4　　D．5

【变式 1】已知函数 $f\left(x\right)=2\ln x+ax^2-3x$ 在 $x=2$ 处取得极小值，则 $f\left(x\right)$ 的极大值为__________

【变式 2】若函数 $f\left(x\right)=\left(x^2+ax+2\right)\cdot \mathrm{e}^x$ 在 R 上无极值，则实数 a 的取值范围（　　）

A．$\left(-2,2\right)$　　B．$\left(-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

C．$\left[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right]$　　D．$\left[-2,2\right]$

题型八　导数与函数最值的相关问题

【例 1】函数 $f\left(x\right)=\dfrac{3}{2}x^2-27\ln x$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值是（　）

A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．$\dfrac{3}{2}$

【变式 1】设函数 $f\left(x\right)=\ln\left(2x+3\right)+x^2$．

(1)求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(-1,f\left(-1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)求 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[-\dfrac{3}{4},-\dfrac{1}{4}\right]$ 上的最大值和最小值.

【变式 2】设 $f(x)=(2-x)(x+2)^2$

(1)求 $f(x)$ 的极值点；

(2)求 $f(x)$ 的单调区间；

(3)求 $f(x)$ 在 $\left[-5,1\right]$ 的最大值与最小值；

(4)画 $f(x)$ 的草图.

课后模拟·巩固练习

一、单选题

1．已知函数 $f(x)=3x^2-2x$，则 $f'(1)=$（　）

A．-4　　B．1　　C．4　　D．2

2．已知曲线 $y=x^2-\frac{a}{x}(a\in\mathbf{R})$ 在 $x=2$ 处的切线斜率为 2，则 $a=$（　）

A．-18　　B．18　　C．-8　　D．8

3．已知函数 $f(x)=3f'(1)x-x^2+\frac{1}{2}$，则 $f'(1)=$（　）

A．1　　B．2　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$-\frac{1}{2}$

4．函数 $f(x)=xe^x$ 在 $x=1$ 处的切线斜率为（　　）

A．1　　B．e　　C．2e　　D．4e

5．函数 $f(x)=x+a\ln x$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与直线 $y=-\frac{1}{2}x$ 垂直，则 $a=$（　　）

A．1　　B．2　　C．-1　　D．-2

6．已知函数 $f(x)=\ln x-mx$，若函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上单调递减，则实数 m 的最小值为（　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．2　　D．$2\sqrt{2}$

7．函数 $f(x)=x\ln x$ 的单调减区间是（　）

A．$(-\infty,-e)$　　B．$\left(-\infty,\frac{1}{e}\right)$　　C．$\left(0,\frac{1}{e}\right)$　　D．$(0,e)$

8．曲线 $f(x)=-2x^3+1$ 在点 $(1,-1)$ 处的切线方程为（　）

A．$6x+y+5=0$　　B．$6x+y-5=0$

C．$5x-y-6=0$　　D．$5x+y-4=0$

9．函数 $f(x)=x^3-6x^2+16$，$x\in[0,5]$ 的最小值为（　）

A．-16　　B．-9　　C．9　　D．16

10．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$ 在 $[-1,1]$ 上的最大值是（　）

A．$-\frac{4}{3}$　　B．0　　C．$-\frac{2}{3}$　　D．$\frac{2}{3}$

11．已知曲线 $f(x)=ax+\ln x-2$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程是 $y=2x+b$，则 $b=$（　）

A．-3　　B．-2　　C．1　　D．-1

12．若函数 $f(x)=x^3-3ax$ 在 $(0,1)$ 内无极值，则实数 a 的取值范围是（　）

A．$\left(1,+\infty\right)$ B．$\left(-\infty,0\right)$

C．$\left(-\infty,0\right]\cup\left[1,+\infty\right)$ D．$\left[0,1\right]$

13．函数$f\left(x\right)=\ln x-\frac{x}{e^2}$的极大值为（　）

A．$-\frac{1}{e^2}$ B．0 C．e D．1

14．函数$y=\frac{1}{2}x^2-\ln x$的单调递减区间为（　）

A．$\left(-1,1\right]$ B．$\left[-1,1\right]$ C．$\left[1,+\infty\right)$ D．$\left(0,1\right]$

15．函数$f\left(x\right)=x-\ln x$的单调递减区间为（　）

A．$(-\infty,1)$ B．$(0,1)$

C．$(1,+\infty)$ D．$(-\infty,0),(0,1)$

二、解答题

16．已知函数$f(x)=x^2-e^x$．

(1)求$f(x)$的图象在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)若$g\left(x\right)=f'\left(x\right)$（$f'(x)$为函数$f(x)$的导函数），求$g(x)$在区间$\left[0,1\right]$上的最大值和最小值．

17．已知函数$f\left(x\right)=\frac{3}{2}x^2-4ax+9\ln x$在$x=3$处取得极值．

(1)求实数a的值；

(2)求函数$f\left(x\right)$在区间$\left[e,e^2\right]$上的最小值．

18．求下列各函数的导数：

(1)$y=\ln(3x-2)$；

(2)$y=e^{2x-1}+\frac{1}{2}\ln\left(2x\right)$．

19．已知曲线C：$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+\frac{2}{3}$．

(1)求$f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程；

(2)求$f(x)$的极值．

20．已知函数$f\left(x\right)=\left(2x^2-5x+4\right)\mathrm{e}^x$．

(1)求$y=f\left(x\right)$在点$\left(0,f\left(0\right)\right)$处的切线方程；

(2)求函数$f\left(x\right)$的极值．

21．设函数$f\left(x\right)=a\ln x-\frac{1}{4x}-\frac{5}{4}x+1$，其中$a\in\mathbf{R}$，曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线垂直于$y$轴.

(1)求a的值；

(2)求函数$f\left(x\right)$的极值.

22．已知函数$f\left(x\right)=\frac{2x+1}{x^2+2}$．

(1)求曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(1,f\left(1\right)\right)$处的切线方程；

(2)求$f\left(x\right)$的极值．