

等比数列及其前 n 项和

知识点·梳理

①等比数列的有关概念

1) 等比数列的定义：一个数列从第 2 项开始，每一项与它的前一项的比值都等于同一个常数

的数列，其中这个常数称为公比.

2) 等比数列定义式： $\frac{a_n}{a_{n-1}} = q (n \geq 2, q \text{ 为常数})$.

3) 等比中项：若 a, G, b 成等比数列，则 $G^2 = ab$.

4) 等比数列的通项公式： $a_n = a_1 q^{n-1}$ 或 $a_n = a_m q^{n-m}$.

5) 等比数列的前 n 项和： $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ (当 $q \neq 1$ 时)， $S_n = na_1$ (当 $q = 1$ 时).

②等比数列的单调性

单调递增	$a_1 > 0, q > 1$
	$a_1 < 0, 0 < q < 1$
单调递减	$a_1 > 0, 0 < q < 1$
	$a_1 < 0, q > 1$

③等比数列的性质

已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列， S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

1) 若 $m+n = p+q (m, n, p, q \in N^*)$, 则有 $a_m \cdot a_n = a_p \cdot a_q$;

2) 若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，公比为 q ，则 $a_k, a_{k+m}, a_{k+2m}, \dots (k, m \in N^*)$ 是等比数列;

3) 数列 $S_m, S_{2m} - S_m, S_{3m} - S_{2m}, \dots$ 成等比数列;

4) 相邻奇数项或者偶数项的符号保持一致.

题型一 等比数列基本量的计算

【例 1-1】(2024 年真题) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 = 324, a_3 + a_4 = 36, a_5 + a_6 =$

A、2 B、4 C、9 D、252

【例 1-2】(2021 年真题) 若 $\{a_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 且 $a_1 + a_3 = 5$, 则 $a_5 =$ _____.

【例 1-3】(2020 年真题) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1 + a_2 = \frac{3}{2}, a_4 + a_5 = 12$, 则 $a_3 =$ _____

【例 1-4】(2012 年真题) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 + a_2 + a_3 = 1, a_6 + a_7 + a_8 = 32$, 则

$a_1 + a_2 + \cdots + a_9 =$ _____

【例 1-5】(2011 年真题) 已知 $\{a_n\}$ 是等比数列, $a_1 \neq a_2, a_1 + 2a_2 = 3a_3 = 1$, 则 $a_1 =$

【例 1-6】(2010 年真题) $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 已知 $a_3 = 12, a_3 + a_4 + a_5 = 84$, 则

$a_1 + a_2 + a_3 =$ _____

【例 1-7】(2008 年真题) S_n 是等比数列的前 n 项和, 已知 $S_2 = 1$, 公比 $q = 1$, 则 $S_4 =$

A.2 B.3 C.5 D.8

【例 1-8】(2006 年真题) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的第 3 项 $a_3 = 12$, 第 8 项 $a_8 = 384$, 则第 5 项 $a_5 =$ _____ (用数字作答)

【例 1-9】(2004 年真题) 已知等比数列的公比是 2, 且前 4 项的和为 1, 那么前 8 项之和为 _____

【变式 1】在等比数列 $\{a_n\}$ 中,

(1)已知 $a_1 = -3$, $q = 2$, 求 a_5 ;

(2)已知 $a_1 = 1$, $q = 2$, $a_n = 16$, 求 n ;

(3)已知 $q = -\frac{3}{2}$, $a_4 = -27$, 求 a_1 .

(4) $a_8 = \frac{1}{16}$, $q = \frac{1}{2}$, 求 S_8 ;

(5) $S_3 = 14$, $a_1 = 2$, 求 q ;

题型二 等比中项

【例 2-1】已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, $a_2 a_6 a_{10} = 8$, 则 $a_3 a_9 = ()$

A. 2 B. 4 C. 8 D. 16

【例 2-2】已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 = 2$, $a_6 = 8$, 则 $a_4 = ()$

A. 4 或 -4 B. -4 C. 4 D. 8

【例 2-3】等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 48$, $a_8 = 3$, 则 a_4 与 a_8 的等比中项为 $()$

A. 12 B. -12 C. ± 12 D. 30

【例 2-4】已知 $a = 5 + 2\sqrt{6}$, $c = 5 - 2\sqrt{6}$, 若 a, b, c 三个数成等比数列, 则 $b = ()$

A. 5 B. 1 C. -1 D. -1 或 1

【变式 1】已知各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$, $a_1 a_7 = 3$, $a_2 a_8 = 27$, 则 $a_4 a_5 = ()$

A. 7 B. 8 C. 9 D. 10

【变式 2】等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4 = 48, a_6 = 12$, 则 a_4 与 a_6 的等比中项为 $()$

A. 24 B. -24 C. ± 24 D. 30

【变式 3】已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, S_n 是它的前 n 项和, 若 $a_2 \cdot a_3 = 2a_1$, 且 a_4 与 $2a_7$ 的等差中项为 $\frac{5}{4}$, 则 $S_4 = ()$

A. 35 B. 33 C. 31 D. 30

题型三 等比数列的性质

【例 3-1】(2024 年真题) 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 + a_2 = 324, a_3 + a_4 = 36, a_5 + a_6 =$

- A、2 B、4 C、9 D、252

【例 3-2】(2013 年真题) 若等比数列前 n 项和为 $5^n + a$, 则 $a =$

- A、-5 B、0 C、1 D、-1

【例 3-3】等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = t \cdot 2^{n-1} - 1$, 则 $t = (\quad)$

- A. 2 B. -2 C. 1 D. -1

【例 3-4】设等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n . 已知 $S_3 = 30, S_6 = 120$, 则 $\frac{S_9}{S_3} = (\quad)$

- A. 13 B. 12 C. 6 D. 3

【变式 1】已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $S_n = p \cdot 3^n - 2$, 则 p 等于 (\quad)

- A. -3 B. 3 C. -2 D. 2

【变式 2】等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $\frac{S_6}{S_3} = 4$, 则 $\frac{S_9}{S_6} = (\quad)$

- A. $\frac{9}{4}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{13}{4}$ D. $\frac{4}{13}$

【变式 3】已知数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, S_n 为其前 n 项和, 若 $a_1 + a_2 + a_3 = 3$, $a_4 + a_5 + a_6 = 9$, 则 $S_{12} = (\quad)$

- A. 27 B. 39 C. 81 D. 120

题型四 等差数列与等比数列综合

【例 4-1】(2019 年真题) 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列, 且 $a_3, 3a_2, a_4$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的公比为_____

【例 4-2】(2018 年真题) 已知 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, $a_1=1$, 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $b_n = a_{2^n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n

【例 4-3】(2016 年真题) 已知 $\{b_n\}$ 是等比数列, $b_1=4, b_4=\frac{1}{16}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \log_2 b_n$

(1) 证明数列 $\{a_n\}$ 是等差数列

(2) 求 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 的最大值

【例 4-4】(2009 年真题) $\{a_n\}$ 是等比数列, $\{b_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 已知

$$a_1 = b_1 = 1, a_2 = b_2, a_3 = b_5$$

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 是否存在正整数 n , 使 $a_7 = S_n$? 若存在, 求出 n , 若不存在, 说明理由。

【例 4-5】(2003 年真题) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=4$, 且 a_1, a_7, a_{10} 又成等比数列, $S_n=11$,

求公差 d 及项数 n

课后模拟·巩固练习

1. 正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_4=1, a_5 a_{11}=81$, 则 $a_6 = ()$

A. $\sqrt{3}$ B. 3 C. 6 D. 9

2. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_3 a_7 a_9 a_{11} = 36$, 则 $a_2 a_{14} = ()$

A. 6 B. 9 C. ± 6 D. ± 9

3. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_1+a_3+a_5=26$, 则 $a_3+a_5+a_7=(\quad)$
 A. 26 B. 78 C. 104 D. 130
4. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5=2, a_5a_8=a_7$, 则 $\{a_n\}$ 的公比 $q=(\quad)$
 A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $2\sqrt{2}$ D. 4
5. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $3a_1, \frac{1}{2}a_3, 2a_2$ 成等差数列, 则 $\frac{a_9+a_{10}}{a_7+a_8}=(\quad)$
 A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. 9 D. $\frac{1}{9}$
6. 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 的前三项和为28且 $a_3=4$, 则 $a_8=(\quad)$
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{8}$ D. $\frac{1}{16}$
7. 已知 $m>0$, 等比数列 $m, m+2, 2m+1, \dots$, 的第4项为 (\quad)
 A. 12 B. $\frac{27}{2}$ C. 9 D. $\frac{21}{2}$
8. 已知 $\{a_n\}$ 是单调递增的等比数列, $a_4+a_5=24, a_3a_6=128$, 则公比 q 的值是 (\quad)
 A. 2 B. -2 C. 3 D. -3
9. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为2, 若 a_1, a_2, a_4 成等比数列, 则 $a_2=(\quad)$
 A. -10 B. -6 C. 4 D. -4

二、填空题

10. 2和6的等比中项是_____.
11. 2和4的等差中项为_____, 等比中项为_____.
12. 首项为1的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $4a_1, 2a_2, a_3$ 成等差数列, 则公比 $q=_____$.

13. 设 S_n 为公比 $q \neq 1$ 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $3a_1, 2a_2, a_3$ 成等差数列, 则 $\frac{S_4}{S_2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项 $a_1 = 4$ 的等比数列, 且 $4a_1, a_5, -2a_3$ 成等差数列, 则其公比 q 等于 $\underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题

15. 等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 1, a_5 = 4a_3$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_m = 31$, 求 m .

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_4 = 6, a_6 = 10$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设等比数列 $\{b_n\}$ 各项均为正数, 其前 n 项和 T_n , 若 $b_3 = a_3, b_5 = a_9$, 求 T_n .

17. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差为零的等差数列, $a_1 = 1$, 且 a_1, a_3, a_9 成等比数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{2^{a_n}\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_{10} .