

函数的单调性与最值

【知识梳理】

一. 单调性

(一) 增函数、减函数的定义

1. 增函数: 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数.

数学符号: $\forall x_1, x_2 \in [a, b]$ 且 $x_1 \neq x_2$, 则

$$(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是增函数}$$

2. 减函数: 如果对于定义域 I 内某个区间 D 上的任意两个自变量的值 x_1, x_2 , 当 $x_1 < x_2$ 时, 都有 $f(x_1) > f(x_2)$, 那么就称函数 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数.

数学符号: $(x_1 - x_2)[f(x_1) - f(x_2)] < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ 在 } [a, b] \text{ 上是减函数.}$

数.

(二) 判断单调性的方法

1. 定义法: 一般步骤为设元 \rightarrow 作差 \rightarrow 变形 \rightarrow 判断符号 \rightarrow 得出结论.

2. 图象法: 如果 $f(x)$ 是以图象形式给出的, 或者 $f(x)$ 的图象易作出, 则可由图象的上升或下降确定单调性.

3. 导数法: 先求导数, 利用导数值的正负确定函数的单调区间.

4. 性质法:

一次函数 $y = kx + b \Rightarrow k > 0 \uparrow, k < 0 \downarrow$ 反比例函数 $y = \frac{k}{x} \Rightarrow k > 0 \downarrow, k < 0 \uparrow$

指数函数 $y = a^x \Rightarrow a > 1 \uparrow, 0 < a < 1 \downarrow$ 对数函数 $y = \log_a x \Rightarrow a > 1 \uparrow, 0 < a < 1 \downarrow$

幂函数 $y = x^\alpha$ (第一象限) $\Rightarrow \alpha > 0 \uparrow, \alpha < 0 \downarrow$ 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) \Rightarrow 开口和对称轴

(三) 复合函数的单调性

$y = f[g(x)]$ 的单调性与 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的单调性有关. 简记: “同增异减”

二. 单调性的应用

(一) 最值

1.定义：设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I ，如果存在实数 M 满足：

(1)对于任意的 $x \in I$ ，都有 $f(x) \leq M$ 或 $f(x) \geq M$ 。

(2)存在 $x_0 \in I$ ，使得 $f(x_0) = M$ 。那么，我们称 M 是函数 $y=f(x)$ 的最大值或最小值。

(二) 解不等式

(三) 比较大小

【考点分类剖析】

考点一 无参数函数的单调性

【例 1-1】(2022·辽宁大连·高三学业考试) 下列函数在 \mathbf{R} 上为增函数的是 ()

- A. $y = x^2$ B. $y = x$ C. $y = -\sqrt{x}$ D. $y = \frac{1}{x}$

【例 1-2】(2022·贵州·贵阳一中) 函数 $f(x) = \ln(2x^2 - 3x + 1)$ 的单调递减区间为 ()

- A. $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right)$ B. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{3}{4}, +\infty\right)$ D. $(1, +\infty)$

【例 1-3】(2022·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ 的单调递增区间是 ()

- A. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ 和 $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, 1]$ 和 $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ D. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$ 和 $[2, +\infty)$

【例 1-4】(1) (2022·全国·高三专题练习) 函数 $f(x) = x^2 - 2x - 3$ 的单调递减区间为_____

(2) (2023·荆州市沙市第四中学) 函数 $y = \frac{1}{x-2}$ 的单调减区间为_____。

(3) (2022·甘肃省民乐县第一中学) 已知函数 $f(x) = x|x| - 2x$ ，则单调递增区间是_____

(4) (2022·重庆北碚区·西南大学附中) 函数 $f(x) = \lg(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是_____

【变式探究】

1. (2022·上海崇明·一模) 下列函数中, 在区间 $(0, +\infty)$ 上为增函数的是 ()

A. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ B. $y = \log_3 x$ C. $y = \frac{1}{x}$ D. $y = (x-1)^2$

2. (2022·全国·高三阶段练习) 下列函数在 $(-\infty, -1)$ 上是减函数的为 ()

A. $f(x) = -\ln x$ B. $f(x) = -\frac{1}{x+1}$

C. $f(x) = |x^2 - 3x - 4|$ D. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

3. (2022·全国·高三阶段练习) 下列函数在区间 $(-\infty, 0)$ 上为增函数的是 ()

A. $y = 1$ B. $y = -\frac{1}{x} + 2$ C. $y = -x^2 - 2x - 1$ D. $y = 1 + x^2$

4. (2023·北京师范大学珠海分校附属外国语学校) 函数 $f(x) = \frac{1}{x+1}$ 的单调区间为_____.

5. (2022·黑龙江高考模拟) 函数 $f(x) = \log_2(x^2 - 3x - 4)$ 的单调减区间为_____.

6. (2023·江苏) 函数 $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 4}$ 的单调增区间为_____.

7. (2023·四川达州市) 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递增区间是_____.

考点二 已知单调性求参数

【例 2-1】(2022·山东临沂·高三阶段练习) “ $a = 2$ ”是“函数 $f(x) = |x - a|$ 在区间 $[2, +\infty)$ 上为增函数”的 ()

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【例 2-2】(1)(2022·云南省镇雄县第四中学)若函数 $y=(2k+1)x+b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单减, 则 k 的取值范围为_____.

(2)(2022·陕西西安市·西安一中)如果函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上单调递减, 那么实数 a 的取值范围是_____.

【变式探究】

1. (2022·四川省资中县第二中学) 若函数 $f(x)=x^2+2(a-1)x+2$, 在 $(-\infty, 5]$ 上是减函数, 则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, -5]$ B. $[5, +\infty)$ C. $[4, +\infty)$ D. $(-\infty, -4]$

2. (2022·陕西省黄陵县中学) 设函数 $f(x)=(1-2a)x+b$ 是 R 上的增函数, 则有 ()

A. $a < \frac{1}{2}$ B. $a > \frac{1}{2}$ C. $a < -\frac{1}{2}$ D. $a > -\frac{1}{2}$

3. (2023·广西钦州市) 函数 $y=x^2+2mx+1$ 在 $[2, +\infty)$ 单调递增, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $[-2, +\infty)$ B. $[2, +\infty)$ C. $(-\infty, 2)$ D. $(-\infty, 2]$

4. (2022·四川省资中县第二中学) 函数 $y=x^2+(a-2)x$ 在区间 $(4, +\infty)$ 上是增函数, 则实数 a 的取值范围是_____。

考点三 利用单调性解不等式

【例 3-1】(2023·广西钦州市) 已知函数 $f(x)$ 为 $(0, +\infty)$ 上的增函数, 若 $f(a^2-a) > f(a+3)$, 则实数 a 的取值范围为_____。

【例 3-2】(2022·陕西西安市·西安一中) 设函数 $f(x)=\begin{cases} 2^x, & x < 2, \\ x^2, & x \geq 2. \end{cases}$

若 $f(a+1) \geq f(2a-1)$, 则实数 a 的取值范围是_____。

【变式探究】

1. (2022·四川省资中县第二中学) 已知函数 $f(x)$ 是定义在区间 $[0, +\infty)$ 上的函数, 且在该区间上单调递增, 则满足 $f(2x-1) < f(\frac{1}{3})$ 的 x 的取值范围是_____。
2. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x)$ 是 \mathbb{R} 上的增函数, $A(0, -3), B(3, 1)$ 是其图象上的两点, 那么不等式 $-3 < f(x+1) < 1$ 的解集的补集是(全集为 \mathbb{R}) _____。

【巩固练习】

1. (2022·全国·高三专题练习) 函数 $y = |-x^2 + 2x + 1|$ 的单调递增区间是_____ ; 单调递减区间是_____。
2. (2022·福建龙岩·高三期中) 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 - x - 6)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 则 a 的取值范围是_____。
3. (2022·新疆·克拉玛依市教育研究所模拟预测(理)) 写出一个定义在 \mathbb{R} 上的单调递减函数_____。
4. (2023·上海市向明中学高三阶段练习) 函数 $f(x) = \ln(x^2 - 2x - 8)$ 的单调递增区间是_____。
5. (2022·陕西·西安中学高三期中) 函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + 2x - 3)$ 的单调递增区间是_____。
6. (2022·江苏课时练习) 函数 $f(x) = |x-1|$ 与 $g(x) = x(x-2)$ 的单调递增区间分别为 ()
A. $[1, +\infty), [1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1], [1, +\infty)$
C. $(1, +\infty), (-\infty, 1]$ D. $(-\infty, +\infty), [1, +\infty)$

7. (2022·江苏课时练习) 函数 $y = \sqrt{x^2 + 3x}$ 的单调递减区间为 ()

- A. $(-\infty, -\frac{3}{2}]$ B. $[-\frac{3}{2}, +\infty)$ C. $[0, +\infty)$ D. $(-\infty, -3]$

8. (2023·北京石景山区) 下列函数中, 在区间 $(-1, 1)$ 上为减函数的是 ()

- A. $y = \frac{1}{1-x}$ B. $y = 2^x$ C. $y = \ln(x+1)$ D. $y = 2^{-x}$

9. (2023·江西景德镇市·景德镇一中) 函数 $y = \sqrt{-x^2 + 4x}$ 的单调递增区间是 _____.

10. (2023·四川省绵阳南山中学高三月考(理)) 函数 $f(x) = |x-2|x$ 的单调递减区间是 _____.

11. (2022·长宁区·上海市延安中学) 若函数 $y = |2x+a|$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上是严格增函数, 则实数 a 的取值范围是 _____.

12. (2023·北京石景山区) 函数 $y = \log_2(x^2 - 2x)$ 的单调增区间为 _____.

13. (2022·全国·高三专题练习) 若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0]$ 上为增函数, 则不等式 $f(2x+1) > f(2-x)$ 的解集 _____.