

函数的概念及其表示

知识点·梳理

①函数的概念:

设 A, B 是**非空**的实数集, 对于集合 A 中的任意一个数 x , 按照确定的对应关系 f , 使在集合 B 中都有**唯一确定**的数 y 和它对应, 那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从 A 到 B 的一个函数, 记作 $y=f(x), x \in A$.

②函数的构成要素:

1) 定义域: 在函数 $y=f(x), x \in A$ 中, x 叫做自变量, x 的取值范围 A 叫做函数的定义域;

定义域的约束:

1°分式的分母不为零; 如果 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 有意义, 则 $g(x) \neq 0$

2°对数的真数部分大于零; 如果 $\log_a^{f(x)}$ 有意义, 则 $f(x) > 0$

3°开偶次方根时, 被开方数大于等于零; 如果 $\sqrt{f(x)}$ 有意义, 则 $f(x) \geq 0$

4°零指数幂底数不为零; 如果 $(f(x))^0$ 有意义, 则 $f(x) \neq 0$

5°如果 $\frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ 有意义, 则 $f(x) > 0$

2) 值域: 与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值, 函数值的集合 $\{y|y=f(x), x \in A\}$ 叫做函数的值域.

3) 解析式

③区间的表示

定义	$\{x a \leq x \leq b\}$	$\{x a < x < b\}$	$\{x a \leq x < b\}$	$\{x a < x \leq b\}$	$\{x x < a\}$	$\{x x > a\}$
名称	闭区间	开区间	半开半闭区间	半开半闭区间	开区间	开区间
符号	$[a, b]$	(a, b)	$[a, b)$	$(a, b]$	$(-\infty, a)$	$(a, +\infty)$

④函数的表示方法:

表示法	定义
解析法	用数学表达式表示两个变量之间的对应关系
图象法	用图象表示两个变量之间的对应关系
列表法	列出表格来表示两个变量之间的对应关系

⑤分段函数:

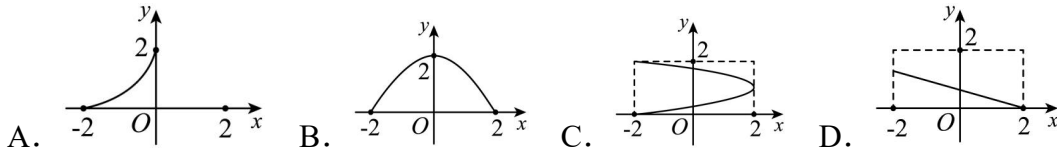
若函数在其定义域内, 对于定义域内的不同取值区间, 有着不同的对应关系, 这样的函数通常叫作分段函数. 分段函数虽由几个部分组成, 但它表示的仍然是一个函数.

⑥复合函数: 函数 $y=f(g(x))$ 分解成 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$

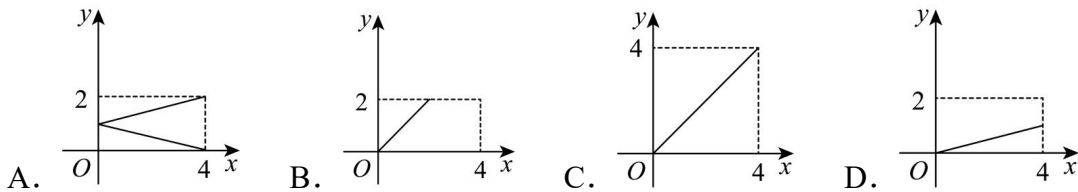
重点题型·归类精讲

题型一 函数关系的判断

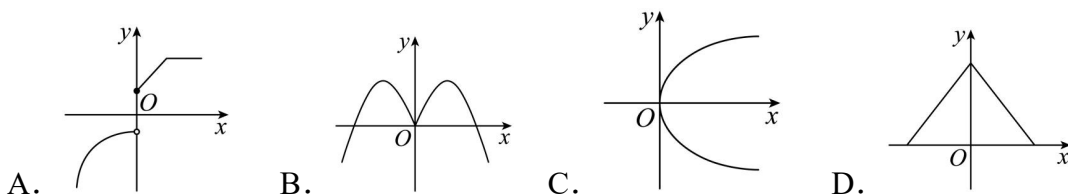
【例 1-1】下面图象中, 不能表示函数的是 ()



【例 1-2】已知集合 $A=\{x|0 \leq x \leq 4\}$, 集合 $B=\{x|0 \leq x \leq 2\}$, 下列图象能建立从集合 A 到集合 B 的函数关系的是 ()



【变式 1】(多选) 下列是函数图象的是 ()



题型二 区间的表示

【例 2-1】把下列数集用区间表示：

- (1) $\{x|x \geq -1\}$; (2) $\{x|x < 0\}$; (3) $\{x|-1 < x < 1\}$; (4) $\{x|0 < x < 1 \text{ 或 } 2 \leq x \leq 4\}$.

【变式 1】集合 $\{x|1 < x < 5\}$ 可用区间表示为 ()

- A. $(1,5)$ B. $[1,5]$ C. $[1,5)$ D. $(1,5]$

【变式 2】若实数 x 满足 $\{x|3 \leq x < 7\}$ ，则用区间表示为 ()

- A. $(3,7)$ B. $(3,7]$ C. $[3,7]$ D. $[3,7)$

题型三 具体函数的定义域

【例 3-1】(2024 年真题) 函数 $y = \log_3(x-2)$ 的定义域为_____

【例 3-2】(2022 年真题) 已知函数 $f(x) = \log_2 \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ 的定义域为 ()

- A. $(-1,3)$ B. $[-1,3]$ C. $(-3,1)$ D. $[-3,1]$

【例 3-3】(2021 年真题) 函数 $y = 2 - \sqrt{9 - x^2}$ 的定义域 ()

- A. $[-3,3]$ B. $[-9,9]$ C. $[3, +\infty)$ D. $(-\infty, -3]$

【例 3-4】(2020 年真题) 函数 $f(x) = \sqrt{3 - 4x + x^2}$ 的定义域是

- A. \mathbb{R} B. $[1,3]$ C. $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$ D. $[0,1]$

【变式 1】(2017 年真题) 函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3x+1}}$ 的定义域是

- A. $\left\{x \mid x \geq -\frac{1}{3}\right\}$ B. $\{x \mid x \geq -3\}$ C. $\left\{x \mid x > -\frac{1}{3}\right\}$ D. $\{x \mid x > -3\}$

【变式 2】(2016 年真题) 函数 $y = \sqrt{8-2^x}$ 的定义域为_____

【变式 3】(2014 年真题) 函数 $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$ 的定义域是_____

【变式 4】(2006 年真题) 函数 $f(x) = \sqrt{\lg(x^2 - x - 1)}$ 的定义域是

A、 $\{x|-2 \leq x \leq 1\}$ B、 $\{x| x \leq -2\} \cup \{x| x \geq 1\}$

C、 $\{x|-1 \leq x \leq 2\}$ D、 $\{x| x \leq -1\} \cup \{x| x \geq 2\}$

题型四 利用函数解析式求值

【例 4-1】(2005 年真题) 若 $f(x^6) = \log_3 x$, 则 $f(27) =$

A、4 B、2 C、 $\frac{1}{2}$ D、 $\frac{1}{4}$

【例 4-2】(2004 年真题) 函数 $f(x) = a^2 - x$ 的图象经过点(1,0), 则 a 的值为

A、 ± 1 B、1 C、0 D、-1

【例 4-3】已知 $f(x) = 2x^2 - 3x - 25$, $g(x) = 2x - 5$, 求:

(1) $f(2), g(2)$;

(2) $f(g(2)), g(f(2))$;

(3) $f(g(x)), g(f(x))$.

【变式 1】已知 $f(x+1) = 2x$, 且 $f(m) = 4$, 则 $m = (\quad)$

A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【变式 2】若 $f(\sqrt{x}+1) = x+1$, 则 $f(3) =$ _____.

题型五 二次函数值域问题

【例 5-1】求函数 $y=x^2+1$ 在下列各区间上的最值：

- (1)[1,4]; (2)[-6,-2]; (3)[-2,2]; (4). [-2,4]

【例 5-2】(2018 年真题) 设 M 与 m 分别是函数 $f(x)=x^2-x-1$ 在区间 $[-1,1]$ 的最大值和最小值, 则 $M-m=$

- A、 $\frac{9}{4}$ B、2 C、 $\frac{3}{2}$ D、 $\frac{5}{4}$

【例 5-3】(2008 年真题) 函数 $f(x)=ax^2+(a-1)x+1(a \neq 0)$ 在当 $x=a$ 时取得最大值, 则 $f(x)$ 的最大值是_____

【例 5-4】(2006 年真题) 若函数 $f(x)=ax-3x^2$ 在区间 $\left[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right]$ 上的最大值和最小值分别是 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{1}{4}$, 则其中的常数 $a=$ _____

【例 5-5】求 $f(x)=x^2-2x-3, x \in (-1,4]$ 的值域

【变式 1】函数 $f(x)=2x^2-x-1 (-1 \leq x \leq 1)$ 的值域是 ()

- A. [0,1] B. $\left[-\frac{9}{8}, 1\right]$ C. [1,2] D. $\left[-\frac{9}{8}, 2\right]$

【变式 2】函数 $y=3x^2-x+2$ 的值域是_____.

题型六 简单复合函数的值域问题

【例 6-1】(2015 年真题) 函数 $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$ 的值域是

- A、 $(-\infty, 1]$ B、 $[1, +\infty)$ C、 $[0, 2]$ D、 $[0, 1]$

【例 6-2】函数 $y=\frac{1}{x^2+1}$ 的值域是_____

【变式 1】函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$ 的值域是 ()

- A. $[0, 2]$ B. $[0, +\infty)$ C. $[2, +\infty)$ D. $(0, 2) \cup (2, +\infty)$

题型七 分段函数

【例 7-1】(2023 年真题) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ \log_3 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{3}\right)\right) =$ ()

- A. -1 B. 1 C. $\sqrt{3}$ D. 3

【例 7-2】(2004 年真题) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_3 x, & x > 0 \\ 2^x, & x \leq 0 \end{cases}$, 则 $f\left[f\left(\frac{1}{9}\right)\right]$ 的值是_____

【例 7-3】已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x < -1 \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1+\frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}$.

(1) 求 $f(f(-2))$ 的值;

(2) 若 $f(x_0) = \frac{3}{2}$, 求 x_0 的值.

【变式 1】已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+4, & x \leq 0 \\ x^2-2x, & 0 < x \leq 4 \\ -x+2, & x > 4 \end{cases}$.

(1) 求 $f(f(5))$ 的值;

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图象.

【变式 2】已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x+1}, & x \leq 0 \\ f(x-3), & x > 0 \end{cases}$, 则 $f(2020) =$ _____.

课后模拟·巩固练习

1、(2010年真题) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} + \sqrt{x+1} + 2$ 的定义域是

- A、 $(-2,1]$ B、 $(-2,1)$ C、 $[-1,2)$ D、 $(-1,2)$

2、(2003年真题) 函数 $f(x) = \log_2(3-x^2)$ 的定义域为_____

3、已知函数 $f(x) = \begin{cases} -2x, & x < -1, \\ 2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1, \end{cases}$

(1) 求 $f\left(-\frac{3}{2}\right)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$;

(2) 若 $f(a) = 6$, 求 a 的值.

4、已知 $f(2x-1) = 2x^2 + 3$, 则 $f(3) = (\quad)$

- A. 5 B. 11 C. 18 D. 21

5、已知函数 $f(x) = x + 4$, $g(x) = -x^2 + 2x$, 则 $f[g(x)] =$ _____.

6、已知函数 $f(x) = a \cdot 2^x - 1$ 的图象过原点, 则 $a =$ _____;

7、已知函数 $y = x^2 - 2x + 3$, 当 $0 \leq x \leq 4$ 时, y 有最大值 a , 最小值 b , 则 $a + b$ 的值为_____

8、已知函数 $f(x) = x^2 - 2x, x \in [0, b]$, 且该函数的值域为 $[-1, 3]$, 则 b 的值为_____.

9、函数 $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ 的值域为_____.

10、关于函数 $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$ 的值域是_____

11、函数 $f(x) = \sqrt{3x-2} + \frac{1}{x-2}$ 的定义域为 ()

A. $\{x | x > \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 2\}$

B. $\{x | x < \frac{2}{3} \text{ 且 } x > 2\}$

C. $\{x | \frac{2}{3} \leq x \leq 2\}$

D. $\{x | x \geq \frac{2}{3} \text{ 且 } x \neq 2\}$

12、函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 2}$ 的值域为_____.

13、已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\frac{1}{2})^x, & x \leq 0 \\ \log_4 x, & x > 0 \end{cases}$, 则 $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) =$ _____.

14、函数 $f(x) = \frac{\log_2(x+2)}{3^{x+1} - 1}$ 的定义域为_____.

15、函数 $f(x) = \frac{3x}{\sqrt{4-x}} + \sqrt{2^x - 2}$ 的定义域是_____.

16、(1) 求下列函数的定义域: $y = \sqrt{3-x} + \frac{1}{|x|-1}$;

(2) 求下列函数的值域: $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$.