

方程与不等式的解法

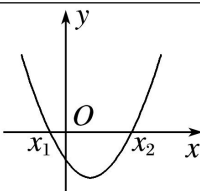
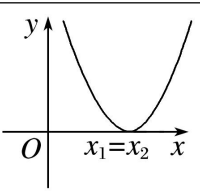
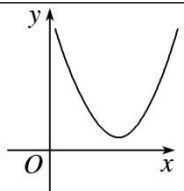
【知识梳理】

一、一元二次方程

- 1、定义：只含有一个未知数，且未知数的最高次数是 2 的整式方程。
- 2、一般形式： $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ ，其中 ax^2 、 bx 、 c 分别叫做二次项、一次项、常数项， a 、 b 、 c 分别称为二次项系数、一次项系数、常数项。
- 3、解一元二次方程的方法
 - (1) 直接开方：形如 $(x+m)^2=n(n\geq 0)$ 的方程，可直接开平方求解。
 - (2) 求根公式：一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式为 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
($b^2-4ac\geq 0$)

二、一元二次不等式的解集

- 1、一元二次不等式的解法
 - (1) 根据解一元二次方程方法选择方法求根
 - (2) 看二次项系数大于 0 或小于 0，选择图像
 - (3) 根据图像选择取中间还是取两边
- 2、一元二次不等式 ($a>0$) 的图像

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
二次函数 $y=ax^2+bx+c$ ($a>0$) 的图象			
方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	有两相异实根 $x_1, x_2(x_1<x_2)$	有两相等实根 $x_1=x_2 = -\frac{b}{2a}$	没有实数根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x x<x_1 \text{ 或 } x>x_2\}$	$\left\{x \mid x \neq -\frac{b}{2a}\right\}$	$\{x x \in \mathbf{R}\}$
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x x_1<x<x_2\}$	\emptyset	\emptyset

三、 $|ax+b| \leq c$ 和 $|ax+b| \geq c$ 型绝对值不等式的解法

$$|ax+b| \leq c \Leftrightarrow -c \leq ax+b \leq c; \quad |ax+b| \geq c \Leftrightarrow ax+b \leq -c \text{ 或 } ax+b \geq c$$

四、分式不等式

1. $\frac{f(x)}{g(x)} < 0 / > 0 \Leftrightarrow f(x)g(x) < 0 / > 0 \Rightarrow$ 按一元二次不等式求解

2. $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0 / \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)g(x) \leq 0 / \geq 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ 按一元二次不等式求解

3. $\frac{f(x)}{g(x)} < k / > k \Rightarrow$ k 左移，通分，按1模式计算

4. $\frac{f(x)}{g(x)} \leq k / \geq k \Rightarrow$ k 左移，通分，按2模式计算

【考点分类剖析】

题型一 一元二次方程

【例1】解下列方程：

(1) $(2x+1)^2 = 9$;

(2) $3x^2 - 5x - 2 = 0$;

(3) $2x^2 - 4x - 5 = 0$;

(4) $(x-3)^2 - 4x(3-x) = 0$.

【例2】解下列方程：

(1) $x^2 + 2x - 2 = 0$;

(2) $2x(x+2) = 3-x$;

(3) $x^2 - 8x + 8 = 17x^2$.

【变式探究】

1. 解下列方程

(1) $(x-2)^2 - 25 = 0$

(2) $(x-2)(x+3) = 6x+7$

(3) $x(x+3) = 5(x+3)$;

$$(4) x^2 - 2x - 5 = 0$$

$$(5) x^2 = 9$$

$$(6) x^2 + 3x - 4 = 0$$

$$(7) x^2 - x - 6 = 0$$

$$(8) x^2 - 10x + 24 = 0;$$

$$(9) 5x^2 - 4x - 4 = 0.$$

$$(10) 2x^2 - 3x - 5 = 0$$

$$(11) x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$(12) 3(x-2)^2 = x(x-2)$$

题型二 一元二次不等式

【例3】解下列不等式

$$(1) (x+2)(x-3) < 0$$

$$(2) -3x^2 + 5x - 2 > 0.$$

$$(3) x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$(4) x^2 - 2x - 8 > 0$$

$$(5) x^2 - 4x + 4 \leq 0$$

$$(6) x^2 - x + 2 < 0$$

【变式探究】

1、解下列不等式：

$$(1) -2x^2 - x + 6 \geq 0;$$

$$(2) x^2 + x + 1 > 0;$$

$$(3) (3x-1)(x+1) > 4.$$

$$(4) x^2 - x - 6 > 0;$$

$$(5) 25x^2 - 10x + 1 > 0;$$

$$(6) -2x^2 + x + 1 < 0.$$

$$(7) 3x^2 - 7x + 2 > 0.$$

$$(8) x^2 - x + 9 < 0.$$

$$(9) (x-2)(x+1) > 6(2-x).$$

$$(10) (2x+1)(3-x) > 0.$$

题型三 绝对值不等式

【例 4】 (1) $|2x-1|>3$ (2) $|3x-4|>3$; (3) $|5-2x|\leq 3$;

【变式探究】

1、解下列不等式

(1) $|x-3|<4$; (2) $|1-2x|\geq 3$. (3) $|2x-3|<5$;

(4) $|2x-3|<1$. (5) $|3-2x|>3$

题型四 分式不等式

【例 5】 解下列不等式:

(1) $\frac{2x-5}{x+4}<0$; (2) $\frac{x-2}{1-x}\geq 0$ (3) $\frac{x+1}{2x-3}\leq 1$.

(4) $\frac{2x-1}{x+2}\leq 1$; (5) $\frac{1-x}{2x+3}>0$; (6). $\frac{2x-1}{1-x}\leq 1$

【变式探究】

1、解下列不等式

(1) $\frac{x-1}{x+2}\leq 0$ (2) $\frac{x+1}{x-3}\geq 0$ (3) $\frac{x-3}{x+7}<2$ (4) $\frac{5x-2}{2x+1}>3$ (5) $\frac{2x-3}{x+5}>0$