

# 三角函数的概念及诱导公式

## 知识点·梳理

### 1、任意角与弧度制

①角的概念：角可以看成一条射线绕着它的端点旋转所成的图形。

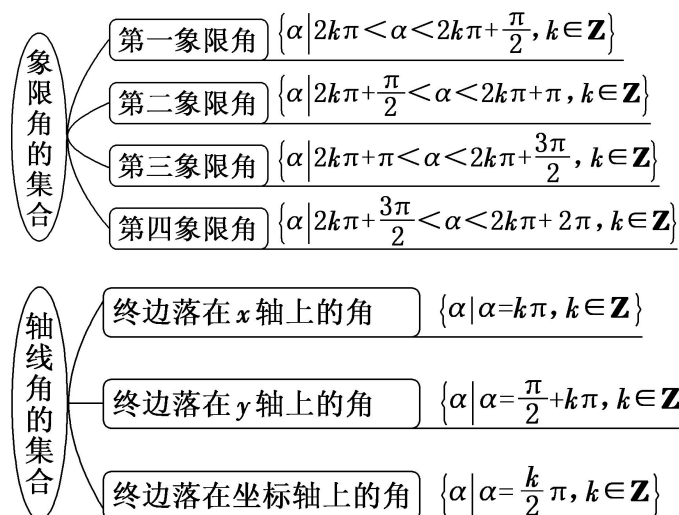
②角的分类：
 

- 按旋转方向不同分为正角、负角、零角
- 按终边位置不同分为象限角和轴线角

③终边相同的角：所有与角  $\alpha$  终边相同的角，连同角  $\alpha$  在内，可构成一个集合

$$S = \{ \beta \mid \beta = \alpha + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbf{Z} \}, \text{ 即任一与角 } \alpha \text{ 终边相同的角, 都可以表示成角 } \alpha \text{ 与整数个周角的和.}$$

④象限角与轴线角：



⑤弧度制与扇形的弧长和面积公式：

定义	长度等于半径长的圆弧所对的圆心角叫做 1 弧度的角，弧度单位用符号 rad 表示。
角 $\alpha$ 的弧度数公式	$ \alpha  = \frac{l}{r}$ ( $l$ 表示弧长)
角度与弧度的换算	① $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$ ; ② $1 \text{ rad} = \left( \frac{180}{\pi} \right)^\circ$
弧长公式	$l =  \alpha  r$
扇形面积公式	$S = \frac{1}{2} lr = \frac{1}{2}  \alpha  r^2$

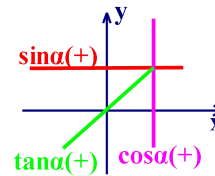
### 2、三角函数的概念

①定义：设  $\alpha$  是任意角， $P(x, y)$  为  $\alpha$  终边上一点，则

$$\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \tan \alpha = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

②三角函数值的正负

- (1)  $\sin\alpha$  在一、二象限为正;
- (2)  $\cos\alpha$  在一、四象限为正;
- (3)  $\tan\alpha$  在一、三象限为正;



③同角三角函数之间的关系

- (1) 平方关系:  $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ ;
- (2) 商数关系:  $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} (\cos\alpha \neq 0)$ ;

④特殊角的三角函数值

角度	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$	$270^\circ$	$360^\circ$
弧度	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	不存在	0

3、诱导公式

①诱导公式

公式一	$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos\alpha$	$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan\alpha$
公式二	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan\alpha$
公式三	$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
公式四	$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
公式五	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$	
公式六	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha$	

②口诀: 奇变偶不变, 符号看象限.

- 1) 奇变偶不变, 符号看象限.“奇”“偶”指的是“ $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha, k \in \mathbf{Z}$ ”中的  $k$  是奇数还是偶数.
- 2) “变”与“不变”是指函数的名称的变化.
- 3) “符号看象限”指的是在“ $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha (k \in \mathbf{Z})$ ”中, 将  $\alpha$  看成锐角时, “ $k \cdot \frac{\pi}{2} + \alpha (k \in \mathbf{Z})$ ”的终边所在的象限.

## 题型一 角的概念

【例 1-1】(2005 年真题) " $\cos \theta = \frac{1}{2}$ " 是 " $\theta = \frac{\pi}{3}$ " 的

- A、充分必要条件                      B、充分不必要条件  
B、 C、必要不充分条件              D、既不充分也不必要条件

【变式 1】已知向量  $\vec{a} = (1, \sin \theta)$ ,  $\vec{b} = (-1, \cos \theta)$ , 则 " $\theta = \frac{3\pi}{4}$ " 是 " $\vec{a} \parallel \vec{b}$ " 的 ( )

- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充分必要条件                        D. 既不充分也不必要条件

【变式 2】" $\tan \theta = \sqrt{3}$ " 成立的充要条件是 ( )

- A.  $\theta = \frac{\pi}{3}$                                   B.  $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$   
C.  $\theta = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$                 D.  $\theta = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

## 题型二 三角函数的定义

【例 2-1】若角  $\alpha$  的终边经过点  $(-3, 4)$ , 则  $\cos \alpha =$  ( )

- A.  $\frac{4}{5}$                       B.  $-\frac{4}{5}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $-\frac{3}{5}$

【例 2-2】角  $\theta$  的终边经过点  $(-2, 3)$ , 则  $\sin \theta =$  ( )

- A.  $-\frac{3}{13}\sqrt{13}$               B.  $-\frac{2}{13}\sqrt{13}$               C.  $\frac{2}{13}\sqrt{13}$               D.  $\frac{3}{13}\sqrt{13}$

【变式 1】已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P\left(\sin \frac{\pi}{3}, \frac{1}{2}\right)$ , 则  $\cos \alpha =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $\frac{1}{2}$                       D.  $-\frac{1}{2}$

【变式 2】已知  $P(1, m)$  是角  $\theta$  的终边上一点,  $\tan\theta = -2$ , 则  $\sin\theta =$  ( )

- A.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$       B.  $-\frac{\sqrt{5}}{5}$       C.  $\frac{\sqrt{5}}{5}$       D.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

B.

### 题型三 三角函数的定义--三角函数值的正负

【例 3-1】(2006 年真题) 设角  $\theta$  使得  $\sin 2\theta > 0$  与  $\cos\theta < 0$  同时成立, 则角  $\theta$  是

- A、第一象限角      B、第二象限角      C、第三象限角      D、第四象限角

【例 3-2】已知  $\alpha$  为第二象限角, 则 ( )

- A.  $\cos\alpha - \sin\alpha > 0$       B.  $\sin\alpha + \cos\alpha > 0$   
C.  $\sin 2\alpha < 0$       D.  $\sin\alpha \tan\alpha > 0$

【变式 1】已知角  $\alpha$  终边上有一点  $P(\sin\frac{5\pi}{6}, \cos\frac{5\pi}{6})$ , 则  $\pi - \alpha$  是 ( )

- A. 第一象限角      B. 第二象限角      C. 第三象限角      D. 第四象限角

【变式 2】“ $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ”是“ $\cos\alpha > 0$ ”的 ( )

- A. 充分不必要条件      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件      D. 既不充分也不必要条件

### 题型四 同角三角函数关系--知一求二

【例 4-1】(2010 年真题) 已知  $\alpha \in (0, \pi)$ ,  $\tan\alpha = -2$ , 则  $\sin\alpha + \cos\alpha =$

- A、 $-\frac{3\sqrt{5}}{5}$       B、 $\frac{3\sqrt{5}}{5}$       C、 $-\frac{\sqrt{5}}{5}$       D、 $\frac{\sqrt{5}}{5}$

【例 4-2】(2004 年真题) 已知  $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ , 那么  $\sin 2\alpha$  的值是

- A、 $-\frac{2}{3}\sqrt{2}$       B、 $\frac{2}{3}\sqrt{2}$       C、 $-\frac{\sqrt{3}}{8}$       D、 $\frac{\sqrt{3}}{8}$

【例 4-3】已知  $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ , 则  $\sin\alpha$  的值为 ( )

- A.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$       B.  $-\frac{\sqrt{6}}{3}$       C.  $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$       D.  $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$

【变式 1】已知  $\tan\alpha = \frac{2}{3}$ , 且  $\pi < \alpha < 2\pi$ , 则  $\cos\alpha =$  ( )

- A.  $-\frac{3\sqrt{13}}{13}$       B.  $\frac{3\sqrt{13}}{13}$       C.  $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$       D.  $\frac{2\sqrt{13}}{13}$

【变式 2】已知  $\cos\theta = \frac{3}{5}$ , 且  $\sin\theta < 0$ , 则  $\tan\theta$  的值为 ( )

- A.  $-\frac{4}{3}$       B.  $\frac{4}{3}$       C.  $\frac{3}{4}$       D.  $-\frac{3}{4}$

【变式 3】已知  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ , 且  $\tan\alpha = \sqrt{2}$ , 那么  $\sin\alpha =$  ( )

- A.  $-\frac{\sqrt{3}}{3}$       B.  $-\frac{\sqrt{6}}{3}$       C.  $\frac{\sqrt{6}}{3}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$

### 题型五 同角三角函数关系—弦的齐次

【例 5-1】(2020 年真题) 已知  $\tan x = -\frac{1}{3}$ , 则  $\sin 2x$

- A、 $\frac{3}{5}$       B、 $\frac{3}{10}$       C、 $-\frac{3}{10}$       D、 $-\frac{3}{5}$

【例 5-2】已知  $\tan\alpha = 2$ , 则  $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$  的值为\_\_\_\_\_.

【变式 1】已知  $\tan \theta = 2$ ，则  $\sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta =$  ( )

- A.  $-\frac{2}{5}$       B.  $\frac{2}{5}$       C.  $-\frac{6}{5}$       D.  $\frac{6}{5}$

【变式 2】已知  $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$ ，则  $\frac{-2 \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$  的值为 ( )

- A.  $-3$       B.  $-\frac{3}{4}$       C.  $-\frac{4}{3}$       D.  $\frac{3}{4}$

【变式 3】 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ，则  $\sin 2\alpha =$  ( )

- A.  $-\frac{4}{5}$       B.  $-\frac{3}{5}$       C.  $\frac{4}{5}$       D.  $\frac{3}{5}$

### 题型六 同角三角函数关系—— $\sin \theta \pm \cos \theta$ 与 $\sin \theta \cdot \cos \theta$

【例 6-1】(2021 年真题) 若  $\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ ，则  $\sin x =$  ( )

- A.  $-\frac{1}{4}$       B.  $-\frac{1}{3}$       C.  $-\frac{2}{3}$       D.  $-\frac{3}{4}$

【例 6-2】(2018 年真题)  $\sin 15^\circ + \cos 15^\circ =$

- A.  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$       B.  $\frac{\sqrt{6}}{2}$       C.  $\sqrt{3}$       D.  $\frac{3\sqrt{6}}{4}$

【例 6-3】(2017 年真题) 设  $\sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ，则  $\sin \alpha =$

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $\frac{1}{4}$

【例 6-4】(2013 年真题)  $\sin A + \cos A = \frac{1}{5}$ ，则  $\sin 2A =$

- A.  $-\frac{1}{25}$       B.  $-\frac{24}{25}$       C.  $\frac{1}{25}$       D.  $\frac{12}{25}$

【变式 1】若  $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$ ，则  $\sin 2\alpha =$  ( )

- A.  $\frac{4\sqrt{2}}{9}$       B.  $-\frac{4\sqrt{2}}{9}$       C.  $-\frac{7}{9}$       D.  $\frac{7}{9}$

【变式 2】已知  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{4}{3}$  ( $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ )，则  $\sin\theta - \cos\theta =$  ( )

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$       B.  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$       C.  $\frac{1}{3}$       D.  $-\frac{1}{3}$

### 题型七 三角函数诱导公式

【例 7-1】(2019 年真题) 已知  $\alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )，则  $\tan \frac{\alpha}{2} =$

- A. -1      B.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       D. 1

【例 7-2】(2016 年真题) 已知  $\alpha$  为第四象限角，且  $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则  $\cos\alpha =$

- A.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{1}{2}$       D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【例 7-3】(2015 年真题)  $\tan\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ ，则  $\tan\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) =$  \_\_\_\_\_

【例 7-4】(2008 年真题) 已知函数  $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ， $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，则  $f(\pi) =$

- A. 0      B. 1      C.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【例 7-5】(2007 年真题) 已知  $\alpha$  是第四象限的角，且  $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ，则  $\cos(\pi + \alpha) =$

- A.  $-\frac{1}{2}$       B.  $\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【例 7-6】(2003 年真题)  $\tan 300^\circ$  的值是

- A、 $\sqrt{3}$       B、 $-\sqrt{3}$       C、 $\frac{1}{2}$       D、 $-\frac{1}{2}$

【变式 1】已知  $f(\alpha) = \frac{\sin(\pi - \alpha)\cos(2\pi - \alpha)\cos\left(-\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(-\pi - \alpha)}$ .

(1) 化简  $f(\alpha)$ ;

(2) 若  $\alpha$  为第三象限角, 且  $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{5}$ , 求  $f(\alpha)$  的值.

【变式 2】平面直角坐标系中, 角  $\alpha$  的终边经过点  $P(1, \sqrt{3})$ , 则  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = ( )$

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$       C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $-\frac{1}{2}$

【变式 3】已知  $\tan \alpha = 2$ , 则  $\frac{\cos(\pi + \alpha) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\sin(-\alpha) + \cos(\alpha - \pi)} = ( )$ .

- A.  $-\frac{1}{3}$       B.  $-1$       C.  $1$       D.  $3$

课后模拟·巩固练习

- 1、已知  $p$ : 角  $\alpha$  的终边过点  $P(1,2)$ ,  $q: \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ , 则  $p$  是  $q$  的 ( )
- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                                D. 既不充分也不必要条件

- 2、已知  $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$ , 且  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ , 则  $\cos\alpha =$  ( )
- A.  $-\frac{4}{5}$                       B.  $-\frac{3}{4}$                       C.  $\frac{3}{4}$                       D.  $\frac{4}{5}$

- 3、设  $x \in \mathbf{R}$ , 则“ $\sin x = 0$ ”是“ $\cos x = 1$ ”的 ( )
- A. 充分不必要条件                      B. 必要不充分条件  
C. 充要条件                                D. 既不充分也不必要条件

- 4、若  $\sin\alpha \tan\alpha < 0$ , 且  $\frac{\cos\alpha}{\tan\alpha} < 0$ , 则角  $\alpha$  是第 ( ) 象限角.
- A. 一                      B. 二                      C. 三                      D. 四

- 5、已知  $\sin\theta + \cos\theta = \frac{4}{3}$  ( $0 < \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ), 则  $\sin\theta - \cos\theta =$  ( )
- A.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$                       B.  $-\frac{\sqrt{2}}{3}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $-\frac{1}{3}$

- 6、已知  $\tan x = 2$ , 则  $\frac{2\sin x + \cos x}{2\sin x - \cos x} =$  ( )
- A. 3                      B.  $\frac{5}{3}$                       C.  $\frac{3}{5}$                       D.  $\frac{1}{3}$

- 7、已知  $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{3}$ , 且  $\alpha \in (0, \pi)$ , 则  $\sin\alpha - \cos\alpha$  的值为 ( )
- A.  $-\frac{1}{3}$                       B.  $-\frac{\sqrt{17}}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{17}}{3}$                       D.  $\frac{\sqrt{17}}{3}$  或  $-\frac{\sqrt{17}}{3}$

- 8、已知  $P(-2,1)$  是  $\theta$  终边上的一点, 则  $\sin 2\theta =$  \_\_\_\_\_.

9、已知角  $\alpha$  的终边经过点  $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ , 则  $\sin \alpha =$  \_\_\_\_\_,  $\cos \alpha =$  \_\_\_\_\_.

10、若  $\cos \alpha - \sin \alpha = \frac{1}{2}$ , 则  $\sin 2\alpha$  的值为 \_\_\_\_\_.

11、已知  $\tan x = 2$ , 则  $2\sin^2 x - \sin x \cos x + 3\cos^2 x =$  \_\_\_\_\_.

12、若  $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{1}{5}$ ,  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , 则  $\tan \alpha =$  \_\_\_\_\_.

13、已知  $\tan(3\pi - \alpha) = \frac{1}{2}$ , 则  $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(\pi - \alpha)}$  等于 ( )

- A. 1                      B.  $-\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $-\frac{1}{3}$

14、已知  $f(\alpha) = \frac{\sin\left(-\alpha - \frac{5\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\tan^2(\pi - \alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin(\pi + \alpha)}$

(1)化简  $f(\alpha)$ ;

(2)若  $f(\alpha) = 2$ , 求  $\sin^2 \alpha - 3\sin \alpha \cos \alpha$  的值.