

三角恒等变换

知识点·梳理

1、和差角公式

$$(1) \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta;$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$(2) \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta;$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta;$$

$$(3) \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta};$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

2、二倍角公式

$$(1) \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$(2) \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha;$$

$$(3) \tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}$$

3、降幂公式及常见变形公式

$$(1) \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2};$$

$$(2) \sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2};$$

$$(3) \sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha$$

4、辅助角公式

形如 $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$, 其中 $\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $\tan\varphi = \frac{b}{a}$

题型一 两角和差公式的正用和逆用

【例 1-1】 $\cos 45^\circ \sin 75^\circ + \sin 45^\circ \cos 75^\circ$ 的值为 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【例 1-2】 $\cos 10^\circ \cos 20^\circ - \sin 10^\circ \sin 20^\circ$ 等于 ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

【例 1-3】(2023 年真题) $\cos 55^\circ \cos 10^\circ + \cos 35^\circ \sin 10^\circ =$ _____.【例 1-4】(2021 年真题) $\sin 168^\circ \cos 18^\circ - \sin 102^\circ \sin 198^\circ =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}$ B. 0 C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【变式 1】 $\cos 70^\circ \sin 50^\circ - \cos 200^\circ \sin 40^\circ$ 的值为_____.【变式 2】 $\sin 7^\circ \cos 23^\circ + \sin 83^\circ \cos 67^\circ =$ _____.【变式 3】 $\sqrt{3} \tan 10^\circ + \sqrt{3} \tan 20^\circ + \tan 10^\circ \tan 20^\circ =$ ()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 3 D. $2\sqrt{3}$

题型二 二倍角公式的正用和逆用

【例 2-1】下列三角式中, 值不为 1 的是 ()

- A. $4 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$ B. $2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{6} - \sin^2 \frac{\pi}{6} \right)$
 C. $\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{6}}$ D. $\frac{2 \tan 22.5^\circ}{1 - \tan^2 22.5^\circ}$

【例 2-1】(2022 年真题) 若 $\sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -\frac{1}{3}$, 则 $\cos 2\theta$ _____.

【例 2-2】(2012 年真题) 已知 $\tan \frac{\alpha}{2} = 3$, 则 $\frac{\sin \alpha + 2\cos \alpha}{2\sin \alpha + \cos \alpha} =$
A、 $\frac{5}{2}$ B、 $-\frac{5}{2}$ C、5 D、-5

【例 2-3】(2009 年真题) $\frac{3 \tan 105^\circ}{1 - \tan^2 75^\circ} =$
A、 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B、 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C、 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ D、 $-\frac{\sqrt{3}}{6}$

【例 2-4】(2008 年真题) 已知 $\frac{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)}{\sin \alpha} = 1$

(1)求 $\tan \alpha$ 的值

(2)求 $\frac{2\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 - \sin 2\alpha}$ 的值

【例 2-5】(2006 年真题) 设 α 是第二象限角, 且 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

(1)求 $\sin \alpha$ 和 $\cos \alpha$ 的值

(2)求 $\frac{\sin 2\alpha + \cos^2 \alpha}{3 - \cos 2\alpha}$ 的值

【例 2-6】(2005 年真题) 设 $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{5}$, 则 $\cos 2\alpha =$ _____

【变式 1】(2024 年真题改编) 化简函数 $y = \sin 3x \cos 3x$ 是 _____

【变式 2】下列各式中, 值不为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的是 ()

- A. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$ B. $2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$
C. $1 - 2 \sin^2 15^\circ$ D. $2 \cos^2 15^\circ - 1$

题型三 给值求值

【例 3-1】(2003 年真题) 已知: $\sin\alpha = \frac{12}{13}, \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, 试求 $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$ 的值

【例 3-2】已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} < \beta < \pi$, $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{12}{13}$, 则 $\cos(\alpha + \beta) =$ ()

- A. $-\frac{63}{65}$ B. $-\frac{33}{65}$ C. $\frac{33}{65}$ D. $\frac{63}{65}$

【例 3-3】已知 α, β 都是锐角, 若 $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\cos(\beta + \alpha) = \frac{12}{13}$, 则 $\cos\alpha =$ ()

- A. $\frac{8}{65}$ B. $\frac{63}{65}$ C. $\frac{33}{65}$ D. $-\frac{33}{65}$

【例 3-4】已知 $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(\frac{5\pi}{3} - 2\alpha\right) =$.

【变式 1】已知 $\cos\left(\frac{\alpha}{2} + 75^\circ\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 $\cos(\alpha - 30^\circ)$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $-\frac{2}{3}$

【变式 2】已知 $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{5}$, 则 $\sin\left(\frac{7\pi}{6} - 2\alpha\right) =$ ()

- A. $\frac{3\sqrt{3}-4}{10}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{9}{25}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{5}$

【变式 3】已知 $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \cos\alpha = \frac{3}{5}$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) =$ ()

- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{3}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【变式 4】已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) =$ ()

- A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

题型四 辅助角公式

【例 4-1】(2023 年真题改编) 化简函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x$ 为_____

【例 4-2】(2022 年真题改编) 化简函数 $y = 3\sin x + 4\cos x + 1$ 为_____

【例 4-3】(2020 年真题改编) 化简函数 $f(x) = \sin^2 x + \cos 2x$ _____

【例 4-4】(2019 年真题改编) 化简函数 $f(x) = \sin x \cos x + \cos^2 x$ _____

【变式 1】(2016 年真题改编) 化简函数 $y = \sin 2x + \cos 2x$ _____

【变式 2】(2015 年真题改编) 化简函数 $y = \sqrt{3}\sin 4x - 3\cos 4x + 1$

【变式 3】(2013 年真题改编) 化简函数 $y = \sin\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right)$

【变式 4】(2010 年真题改编) 化简函数 $f(x) = \sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cos x - \cos^2 x$

【变式 5】(2006 年真题改编) 化简函数 $y = \sin^4 x - \cos^4 x$

课后模拟·巩固练习

1、将下列式子化成 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 或 $y = A \cos(\omega x + \varphi) + B$ 的形式

$$(1) f(x) = \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x$$

$$(2) f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$$

$$(3) f(x) = 2 \sin x \cos x + 2\sqrt{3} \cos^2 x - \sqrt{3}$$

$$(4) f(x) = \sqrt{3} \sin 2x - 2 \cos^2 x - 1$$

$$(5) f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \sin^2 x - \frac{1}{2}$$

$$(6) f(x) = \cos 2x + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$(7) f(x) = \frac{1}{2} \cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \cos x - \frac{1}{4}$$

$$(8) f(x) = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x - 1$$

2、将下列式子化成 $y = A \sin(\omega x + \varphi) + B$ 或 $y = A \cos(\omega x + \varphi) + B$ 的形式

$$(1) f(x) = \cos x (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2}$$

$$(2) f(x) = \sin x \cdot \cos x - \sin^2 x + \frac{1}{2}$$

$$(3) f(x) = 2\sqrt{3} \sin(\pi - x) \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) - 2 \cos^2 x + 1$$

$$(4) f(x) = 2 \sin^2 x + 2\sqrt{3} \sin(\pi - x) \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) (x \in \mathbf{R})$$

$$(5) f(x) = \sqrt{3} \sin x \cos x + \sin^2 x$$

3、已知 $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $-\frac{1}{3}$

4、已知 $\sin\left(\frac{\pi}{12} + \alpha\right) = -\frac{1}{3}$ ，则 $\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \alpha\right)$ 的值等于 ()

- A. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$ B. $-\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

5、已知 $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \frac{1}{2}$ ，那么 $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) =$ _____.

6、已知 $\sin(\pi - \alpha) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ，则 $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) =$ ()

- A. -3 B. 3 C. -4 D. 4

7、已知 α 为锐角， $\cos\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ ，则 $\sin\frac{\alpha}{2} =$ ()。

- A. $\frac{3-\sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$ C. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$

8、下列等式不成立的是 ()

- A. $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$
C. $\frac{1}{2}\sin 40^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ = \sin 70^\circ$ D. $\tan 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$

9、已知 $\cos\theta + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，则 $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) =$ ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{7}{9}$ C. $-\frac{7}{9}$ D. $-\frac{1}{3}$

10、 $\cos 80^\circ \cos 140^\circ - \sin 100^\circ \sin 140^\circ =$ _____.

11、 $\sin 109^\circ \cos 296^\circ + \cos 71^\circ \sin 64^\circ =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

12、 $\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8}\cos\frac{7\pi}{8} = (\quad)$

- A. 1 B. -1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

13、 $\sin 62^\circ \cos 32^\circ + \sin 32^\circ \cos 118^\circ = (\quad)$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

14、计算 $\sin 78^\circ \cos 18^\circ - \cos 78^\circ \sin 18^\circ (\quad)$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $-\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

15、 $\cos 60^\circ \cos 30^\circ - \sin 60^\circ \sin 30^\circ = (\quad)$

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

16、 $\sin 67^\circ \cos 7^\circ + \cos 113^\circ \sin 7^\circ = \underline{\hspace{2cm}}$.

17、已知 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ，则 $\cos 2\alpha$ 等于 ()

- A. $\frac{1}{9}$ B. $-\frac{1}{9}$ C. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$

18、 $\cos^4 \frac{\alpha}{2} - \sin^4 \frac{\alpha}{2}$ 的化简结果为 ()

- A. $\cos \frac{\alpha}{2}$ B. $\cos \alpha$ C. $\cos 2\alpha$ D. $\cos 4\alpha$

19、已知 $\tan \alpha = -\frac{1}{3}$ ，则 $\sin 2\alpha + \cos^2 \alpha$ 等于 ()

- A. $\frac{2}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{3}{10}$