数列求和

①公式法求和

当求出一个数列的通项公式后，发现其为等差数列或者等比数列，即直接套用等差数列或等比数列求和公式进行求和。

②分组求和

如果一个数列可写成$c_n = a_n \pm b_n$的形式，而数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是等差数列或等比数列或可转化为能够求和的数列，那么可用分组求和法。

③裂项相消法求和

当求出一个新的数列为如下表现形式时，可适用裂项相消法进行求和。

常见裂项相消：

1）$\dfrac{1}{n(n+k)}=\dfrac{1}{k}(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+k})$

如：$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1};\dfrac{1}{n(n-1)}=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n}$

2）$\dfrac{1}{(kn-1)(kn+1)}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{kn-1}-\dfrac{1}{kn+1})$

如：$\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1})$（尤其要注意不能丢前边的$\dfrac{1}{2}$）

3）$\dfrac{1}{\sqrt{n+k}+\sqrt{n}}=\dfrac{1}{k}(\sqrt{n+k}-\sqrt{n})$

如：$\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

④错位相减法求和

如果一个数列的各项是由一个等差数列和一个等比数列的对应项之积构成的，那么这个数列的前n项和即可用错位相减法.

q倍错位相减法：若数列$\{c_n\}$的通项公式$c_n = a_n \cdot b_n$，其中$\{a_n\}$、$\{b_n\}$中一个是等差数列，另一个是等比数列，求和时，一般可在已知和式的两边都乘以组成这个数列的等比数列的公比，然后再将所得新和式与原和式相减，转化为同倍数的等比数列求和．这种方法叫q倍错位相减法．

重点题型·归类精讲

题型一　公式法求和

【例 1-1】(2018 年真题) 已知$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，$a_1=1$，且a_1,a_3,a_9成等比数列

(1)求$\{a_n\}$的通项公式

(2)设$b_n=a_{2^n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n

【例 1-2】(2016 年真题) 已知$\{b_n\}$是等比数列，$b_1=4,b_4=\dfrac{1}{16}$，数列$\{a_n\}$满足$a_n=\log_2 b_n$

(1)证明数列$\{a_n\}$是等差数列

(2)求$\{a_n\}$的前n项和S_n的最大值

【例 1-3】(2003 年真题) 在数列$\{a_n\}$中，若$a_1=-2$，且对任意$n\in\mathrm{N}$，有$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}$，则数列$\{a_n\}$的前 10 项和为

A、5　　　B、$\dfrac{21}{2}$　　　C、$\dfrac{5}{2}$　　　D、25

【变式 1】已知数列$\{a_n\}$为等比数列，$a_1=1$，$a_3=3a_2$，则$a_5=$____________；数列$\{a_n+2\}$的前 4 项和为____________.

题型二　分组求和

【例 2-1】(2004 年真题) 设$\{a_n\}$为等比数列，$\{b_n\}$为等差数列，且$b_1=0$，若数列$\{c_n\}$中，$c_n=a_n+b_n,c_1=c_2=1,c_3=2$，求数列$\{c_n\}$的前 10 项和

【例 2-2】已知数列$\{a_n\}$是公差不为零的等差数列，满足$a_3=6$，且a_2，a_4，a_8成等比数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_n+2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和S_n.

【变式 1】等比数列$\{a_n\}$的公比为 2，且a_2, a_3+2, a_4成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=\log_2 a_n+a_n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

题型三　裂项相消求和

【例 3-1】（2016 年真题）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，如果$\{a_n\}$的前$k$项和等于 3，那么$k=$

A、8　　B、9　　C、15　　D、16

【例 3-2】（2007 年真题）数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$，如果$\{a_n\}$的前$n$项和等于 3，那么$n=$

A、8　　B、9　　C、15　　D、16

【例 3-3】若数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=n^2+n$，则$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_{100}}=$（　）

A．$\dfrac{100}{101}$　　B．$\dfrac{1}{101}$　　C．$\dfrac{101}{100}$　　D．$\dfrac{99}{100}$

【变式 1】数列$\{a_n\}$满足$a_n=\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n}$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为（　）

A．$\dfrac{2}{n+2}$　　B．$\dfrac{2n}{n+2}$　　C．$\dfrac{n}{n+1}$　　D．$\dfrac{2n}{n+1}$

题型四　错位相减求和

【例 4-1】等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$a_1+a_3=10$，$4a_3^2=a_2\cdot a_6$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）求数列$\{n\cdot a_n\}$的前n项和T_n.

【变式 1】已知等差数列$\{an\}$的前 n 项和为 Sn，且 a_3＝12，S_4＝40.

（1）求数列$\{an\}$的通项公式；

（2）设$b_n=2^{\frac{a_n}{4}}$，求数列$\{\frac{a_n}{4b_n}\}$的前 n 项和 Tn.

课后模拟·巩固练习

1．化简式子$\frac{1}{1\times3}+\frac{1}{3\times5}+\frac{1}{5\times7}+\cdots+\frac{1}{2023\times2025}$，得（　）

A．$\frac{2022}{2025}$　　B．$\frac{2024}{2025}$　　C．$\frac{1011}{2025}$　　D．$\frac{1012}{2025}$

2．在递增的等比数列$\{a_n\}$中，$a_1\cdot a_2=8$，$a_1+a_2=6$，其中$n\in\mathrm{N}^*$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)若$b_n=2a_n+3$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和T_n.

3．已知数列$\{a_n\}$中，$a_n=2n-1+\frac{1}{3^n}$，求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

4．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足$S_3=-3,S_7=-21$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)$b_n=-a_n+1$，求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+2}}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

5．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，$S_9=-27,S_{10}=-40$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)设$b_n=a_n+2^n$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

6．已知数列$\{a_n\}$的前n项和为$S_n,a_n=2^n$.令$b_n=1+\log_2a_n$，求数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和T_n.