

指对幂函数的性质

知识点·梳理

1、指数与指数函数

①根式

1) 如果 $x^n = a$ ，那么 x 叫做 a 的 n 次方根；

2) 式子 $\sqrt[n]{a}$ 叫做根式，其中 n 叫做根指数， a 叫做被开方数；

3) $(\sqrt[n]{a})^n = a$ 当 n 为奇数时， $\sqrt[n]{a^n} = a$ ；当 n 为偶数时， $\sqrt[n]{a^n} = |a| = \begin{cases} a, a \geq 0, \\ -a, a < 0. \end{cases}$

②分数指数幂的意义

1) 分数指数幂

1° 正分数指数幂： $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 2° 负分数指数幂： $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} (a > 0, m, n \in \mathbf{N}^*)$

3° 0 的分数指数幂：0 的正分数指数幂等于 0，0 的 0 次幂没有意义。

2) 实数指数幂的运算性质

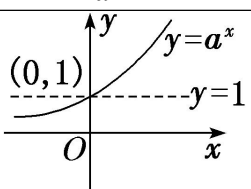
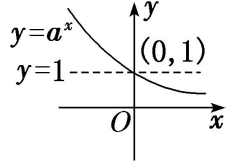
1° $a^r a^s = a^{r+s} (a > 0, r, s \in \mathbf{R})$. 2° $(a^r)^s = a^{rs} (a > 0, r, s \in \mathbf{R})$. 3° $(ab)^r = a^r b^r (a > 0, b > 0, r \in \mathbf{R})$.

③指数函数的概念、图象与性质

1) 指数函数的概念：函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 叫做指数函数，其中指数 x 是自变量，定义域是 \mathbf{R} ， a 是底数。

易错点：形如 $y = ka^x, y = a^{x+k} (k \in \mathbf{R} \text{ 且 } k \neq 0, a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的函数叫做指数型函数，不是指数函数。

2) 指数函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的图象与性质

底数	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		
性质	定义域为 \mathbf{R} ，值域为 $(0, +\infty)$	
	图象过定点 $(0, 1)$	
	当 $x > 0$ 时，恒有 $y > 1$ ；当 $x < 0$ 时，恒有 $0 < y < 1$	当 $x > 0$ 时，恒有 $0 < y < 1$ ；当 $x < 0$ 时，恒有 $y > 1$
	在定义域 \mathbf{R} 上为增函数	在定义域 \mathbf{R} 上为减函数
注意	指数函数 $y = a^x (a > 0, \text{且} a \neq 1)$ 的图象和性质与 a 的取值有关，应分 $a > 1$ 与 $0 < a < 1$ 来研究	

2、对数运算及对数函数

①对数的概念

1) 一般地, 如果 $a^x = N$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$), 那么数 x 叫做以 a 为底 N 的对数, 记作 $x = \log_a N$, 其中 a 叫做对数的底数, N 叫做真数.

2) 常用对数与自然对数

常用对数	将以 10 为底的对数叫做常用对数	把 $\log_{10} N$ 记为 $\lg N$
自然对数	将以无理数 $e = 2.71828\dots$ 为底的对数叫做自然对数	把 $\log_e N$ 记为 $\ln N$

②对数的性质与运算性质

1) 对数的运算法则 如果 $a > 0$ 且 $a \neq 1, M > 0, N > 0$ 那么

$$1^\circ \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N; \quad 2^\circ \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

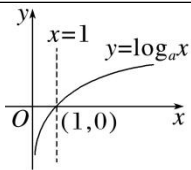
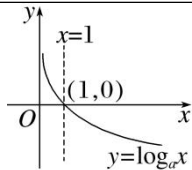
$$3^\circ \log_a M^n = n \log_a M \quad 4^\circ \log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b$$

$$2) \text{对数恒等式: } 1^\circ \log_a 1 = 0; \quad 2^\circ \log_a a = 1; \quad 3^\circ a^{\log_a N} = N \quad 4^\circ \log_a a^N = N$$

$$3) \text{对数换底公式: } 1^\circ \text{换底公式: } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}; \quad 2^\circ \log_a b = \frac{1}{\log_b a},$$

$$\text{推广 } \log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c d = \log_a d$$

③对数函数的图象与性质

$y = \log_a x$	$a > 1$	$0 < a < 1$
图象		
定义域	$(0, +\infty)$	
值域	\mathbf{R}	
性质	过定点 $(1, 0)$, 即 $x = 1$ 时, $y = 0$	
	当 $x > 1$ 时, $y > 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y < 0$	当 $x > 1$ 时, $y < 0$; 当 $0 < x < 1$ 时, $y > 0$
	在 $(0, +\infty)$ 上是增函数	在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

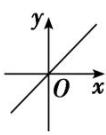
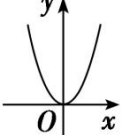
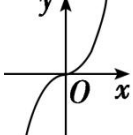
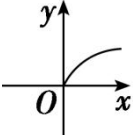
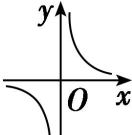
3、反函数

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 与对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 互为反函数，它们的图象关于直线 $y = x$ 对称

4、幂函数

①幂函数的定义：一般地，函数 $y = x^\alpha$ 叫做幂函数，其中 x 是自变量， α 是常数。

②常见的五种幂函数的图象和性质比较

函数	$y=x$	$y=x^2$	$y=x^3$	$y=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$y=\frac{1}{x}=x^{-1}$
图象					
定义域	R	R	R	$\{x x \geq 0\}$	$\{x x \neq 0\}$
值域	R	$\{y y \geq 0\}$	R	$\{y y \geq 0\}$	$\{y y \neq 0\}$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	非奇非偶函数	奇函数
单调性	在 R 上单调递增	$(-\infty, 0]$ 上单调递减； $[0, +\infty)$ 上单调递增	R 上单调递增	$[0, +\infty)$ 上单调递增	$(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减
公共点	(1, 1)				

题型一 根式与指数幂互化

【例 1-1】计算下列各式:

$$(1) \left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2^{-2} \times \left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} - (0.01)^{0.5};$$

$$(2) \left(2\frac{7}{9}\right)^{0.5} + 0.1^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} - 3\pi^0 + \frac{37}{48};$$

$$(3) (a^{-2}b^{-3}) \times (-4a^{-1}b) \div (12a^{-4}b^{-2}c) \quad (a, b, c > 0).$$

【变式 1】化简 (式中各字母均为正数):

$$(1) (x^{\sqrt{2}}y^{\sqrt{3}})^{\sqrt{6}};$$

$$(2) 4x^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 3x^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (-y^{\sqrt{3}}) \cdot y^{\frac{\sqrt{3}}{3}};$$

$$(3) \sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a \cdot \sqrt{a}}}.$$

题型二 指数函数的概念

【例 2-1】下列函数: ① $y = 2 \times 3^x$; ② $y = 3^{x+1}$; ③ $y = \pi^x$; ④ $y = x^x$. 其中为指数函数的个数是 ()

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

【变式 1】若函数 $y = (m^2 - 2m - 2) \cdot m^x$ 是指数函数, 则 m 等于 ()

- A. -1 或 3 B. -1 C. 3 D. $\frac{1}{3}$

题型三 指数函数的解析式与函数值

【例 3-1】指数函数 $f(x) = a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 图像经过点 $(3, 27)$, 则 $f(2) =$ ()

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12

【变式 1】若指数函数 $y = f(x)$ 的图象经过点 $\left(-2, \frac{1}{16}\right)$, 则 $f\left(-\frac{3}{2}\right) =$ _____.

题型四 与指数函数相关的值域问题

【例 4-1】(2021 年真题) 函数 $y = e^{|x|}$ 的最小值是_____.

【例 4-2】求下列函数的值域:

(1) $y = 2^{x+1}$; (2) $y = \sqrt{1-2^x}$; (3) $y = 2^{\sqrt{x}}$.

【例 4-3】函数 $y = 4^x + 2$ 的值域是_____.

【变式 1】函数 $f(x) = 2^x + x, x \in [-1, 1]$ 的值域为_____.

【变式 2】若函数 $y = 2^x$ 在区间 $[2, a]$ 上的最大值比最小值大 4, 则 $a = ()$

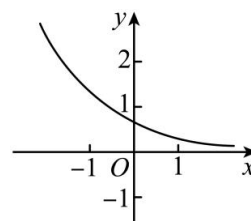
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

题型五 指数函数图像

【例 5-1】已知对不同的 a 值, 函数 $f(x) = 2 + a^{x-1} (a > 0, a \neq 1)$ 的图象恒过定点 P , 则 P 点的坐标是_____.

【例 5-2】函数 $f(x) = a^{x-b}$ 的图象如图所示, 其中 a, b 为常数, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a > 1, b < 0$ B. $a > 1, b > 0$
C. $0 < a < 1, b > 0$ D. $0 < a < 1, b < 0$



【变式 1】利用函数 $y = f(x) = 2^x$ 的图象, 作出下列各函数的图象:

(1) $f(x-1)$; (2) $f(|x|)$; (3) $f(x)-1$; (4) $-f(x)$; (5) $|f(x)-1|$.

题型六 指数函数型的单调性及应用

【例 6-1】函数 $f(x) = 2^{\sqrt{-x^2+4x-3}}$ 的单调递增区间为 ()

- A. $(-\infty, 2]$ B. $[1, 2]$ C. $[2, 3]$ D. $[2, +\infty)$

【例 6-2】(2020 年真题) 已知 $a=0.2^{0.3}, b=0.3^{0.3}, c=0.2^{-0.2}$

- A、 $a < b < c$ B、 $b < a < c$ C、 $b < c < a$ D、 $a < c < b$

【例 6-3】解不等式 $2^{x^2-2x-3} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3(x-1)}$

【例 6-4】(1) 已知 $a=\left(\frac{4}{3}\right)^{-0.1}$, $b=\left(\frac{3}{4}\right)^{-0.1}$, $c=\sqrt[5]{-3}$, 则 () .

- A. $b > c > a$ B. $b > a > c$ C. $a > b > c$ D. $c > b > a$

(2) 下列大小关系正确的是 ()

- A. $0.5^{0.2} > 0.2^{0.2} > 0.2^{0.5}$ B. $0.2^{0.5} > 0.5^{0.2} > 0.2^{0.2}$
C. $0.2^{0.5} > 0.2^{0.2} > 0.5^{0.2}$ D. $0.2^{0.2} > 0.5^{0.2} > 0.2^{0.5}$

【变式 1】已知函数 $f(x)=3^{x^2-3x+1}$, 则 $f(x)$ 的增区间为 ()

- A. $\left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ B. $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$

【变式 2】已知 $a=(2\sqrt{2})^2, b=4^{\sqrt{2}}, c=2^\pi$, 则 a, b, c 的大小关系为 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

【变式 3】已知 $a=2^{\frac{4}{3}}, b=4^{\frac{2}{5}}, c=5^{\frac{2}{3}}$, 则 ()

- A. $b < c < a$ B. $b < a < c$ C. $a < b < c$ D. $c < a < b$

题型七 指数式与对数式互化

【例 7-1】将下列指数式与对数式进行互化.

(1) $5^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ (2) $\log_{\sqrt{2}} 4 = 4$ (3) $\lg 0.001 = -3$ (4) $3^{-2} = \frac{1}{9}$; (5) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = 16$; (6) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$

【变式 1】将下列指数式与对数式互化.

(1) $\log_2 16 = 4$; (2) $\log_{\sqrt{3}} x = 6$; (3) $4^3 = 64$; (4) $3^{-3} = \frac{1}{27}$.

题型八 对数运算性质

【例 8-1】(2017 年真题) $\log_2 3 \times \log_3 4 = \underline{\hspace{2cm}}$

【例 8-2】(2004 年真题) $4\lg 2 + 3\lg 5 - \lg \frac{1}{5}$ 的值是

- A、1 B、4 C、18 D、28

【例 8-3】求下列各式中 x 的值.

(1) $\log_2(\log_5 x) = 0$; (2) $\log_3(\lg x) = 1$; (3) $\log_3(\log_4(\log_5 x)) = 0$.

【例 8-4】求下列各式的值.

(1) $\log_2(4^7 \times 2^5)$; (2) $\lg \sqrt[3]{100}$; (3) $\lg 14 - 2\lg \frac{7}{3} + \lg 7 - \lg 18$

【变式 1】计算下列各式的值.

(1) $2\log_2 3 - \log_2 \frac{63}{8} + \log_2 7 - 7\log_{2^7}(2^2)$;

(2) $\log_3 \sqrt{3} + \lg 25 + \lg 4 - \log_2(\log_2 16)$

题型九 对数与指数的综合应用

【例 9-1】已知 $2^a = 15, \log_8 3 = b$, 则 $2^{a-3b} = (\quad)$

- A. 25 B. 5 C. $\frac{25}{9}$ D. $\frac{5}{3}$

【变式 1】已知 $4^a = 3^b = 6$, 则 $\frac{2a+b}{ab} = \underline{\hspace{2cm}}$.

题型十 对数函数的概念

【例 10-1】若函数 $f(x) = (a^2 - 3a + 3)\log_a x$ 是对数函数, 则 a 的值是 ()

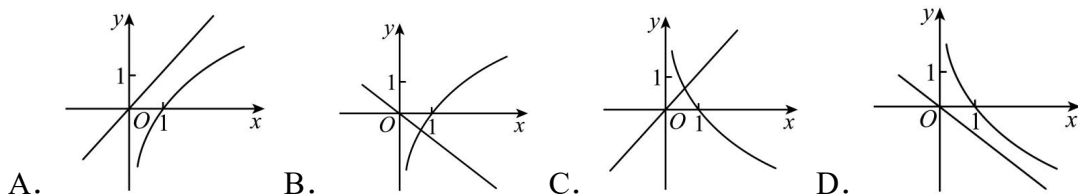
- A. 1 或 2 B. 1 C. 2 D. $a > 0$ 且 $a \neq 1$

【变式 1】下列函数是对数函数的是 ()

- A. $y = \ln x$ B. $y = \log_2 x^2$ C. $y = \log_a \frac{x}{9}$ D. $y = \log_2 x - 2022$

题型十一 对数函数图像的辨析

【例 11-1】函数 $y = (1-a)x$ 与 $y = \log_a x$ (其中 $a > 1$) 的图象只可能是 ()



【变式 1】若 $0 < b < 1 < a$, 则函数 $y = \log_b(x+a)$ 的图象不经过 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

题型十二 比较对数值的大小

【例 12-1】比较下列各组中两个值的大小.

- ① $\log_3 1.99, \log_3 2$. ② $\log_3 0.2, \log_4 0.2$. ③ $\log_2 3, \log_{0.3} 2$. ④ $\log_a \pi, \log_a 3.14$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$).

【变式 1】三个实数 $a = \log_3 4, b = \log_2 5, c = 3^{\frac{1}{2}}$ 的大小关系为 ()

- A. $a < c < b$ B. $c < a < b$ C. $c < b < a$ D. $b < c < a$

【变式 2】若 $a = \log_3 6, b = 2, c = \log_{0.25} 0.125$, 则 ()

- A. $a > c > b$ B. $a > b > c$ C. $b > c > a$ D. $b > a > c$

题型十三 对数型函数的单调性及应用

【例 13-1】(2020 年真题) 不等式 $\log_{\frac{1}{2}} x > 2$ 的解集为 _____.

【例 13-2】函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4x - 5)$ 的递减区间为 _____.

【例 13-3】已知函数 $f(x) = \log_2(3x-1)$ ，则使得 $2f(x) > f(x+2)$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $\left(-\frac{5}{3}, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{4}{3}, +\infty\right)$ C. $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$ D. $\left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

【例 13-4】函数 $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 在区间 $[1, 2]$ 上的值域是 ()

- A. $[-1, 0]$ B. $[0, 1]$ C. $[1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1]$

【例 13-5】求函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 17)$ 的值域.

【例 13-6】(2015 年真题) 若 $0 < a < 1$ ，且 $\log_a(2a^2 + 1) < \log_a(3a) < 0$ ，则 a 的取值范围是_____

【变式 1】不等式 $\log_a(2x+3) > \log_a(5x-6), (a > 1)$ 的解集为_____.

【变式 2】函数 $y = 2 + \log_5 x (x \geq 1)$ 的值域为 ()

- A. $(2, +\infty)$ B. $(-\infty, 2)$ C. $[2, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

【变式 3】函数 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 6x + 17)$ 的值域是_____.

【变式 4】(2010 年真题) 函数 $y = |\log_2(1-x)|$ 的单调递增区间是

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(1, 2)$ D. $(0, 1)$

课后模拟·巩固练习

1、计算下列各式的值.

(1) $0.064^{-\frac{1}{3}} - 16^{\frac{3}{4}} + \left(\frac{1}{9}\right)^0 - \sqrt[4]{81}$

(2) $\sqrt{\frac{25}{9}} - \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{1}{3}} - (\pi + e)^0 + \left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$

(3) $\left(2\frac{7}{9}\right)^{0.5} + 0.1^{-2} + \left(2\frac{10}{27}\right)^{\frac{2}{3}} - 3\pi^0 + \frac{37}{48}$;

(4) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(\sqrt{4ab^{-1}})^3}{(0.1)^{-2}(a^3b^{-3})^{\frac{1}{2}}} \quad (a > 0, b > 0)$.

2、下列大小关系正确的是 ()

- A. $1.7^{2.5} > 1.7^3$ B. $1.7^{0.3} < 0.9^{3.1}$ C. $1.5^{2.5} < 1.5^{3.2}$ D. $0.6^{-1.2} > 0.6^{-1.5}$

3、已知, $a=2^{55}$, $b=3^{44}$, $c=4^{33}$, 则 a 、 b 、 c 的大小关系是 ()

- A. $b > c > a$ B. $a > b > c$ C. $c > a > b$ D. $c > b > a$

4、函数 $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-9}$ 的单调递增区间为 ()

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(0, +\infty)$ C. $(-9, +\infty)$ D. $(-\infty, -9)$

5、对 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 的所有正实数, 函数 $y = a^{x+1} - 2$ 的图象一定经过一定点, 则该定点的坐标是_____.

6、比较下列各组数的大小:

- (1) $0.8^{0.5}$ 与 $\left(\frac{5}{4}\right)^{-0.4}$; (2) $2^{0.3}$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-0.4}$, $8^{0.2}$; (3) 0.6^{-2} 与 $\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}$.

7、比较下列各题中两个值的大小:

- (1) $\left(\frac{5}{7}\right)^{-1.8}$, $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2.5}$; (2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-0.5}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^{-0.5}$; (3) $0.2^{0.3}$, $0.3^{0.2}$.

8、 $2\log_3 2 - \log_3 \frac{32}{9} + \log_3 8 - 5^{\log_3 3} =$ ()

- A. 1 B. 2 C. -1 D. -5

9、 $\lg 2 - \lg \frac{1}{4} + 3\lg 5 - \log_3 2 \times \log_4 9 =$ _____.

10、 $8^{\frac{2}{3}} + 2^{\log_2 3} - \lg \frac{5}{2} - 2\lg 2 =$ _____.

11、设 $a = \log_8 27$, $b = \log_{0.5} 0.2$, $c = \log_4 24$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $b < a < c$ C. $a < c < b$ D. $b < c < a$

12、函数 $f(x) = (a^2 - a + 1) \log_{(a+1)} x$ 是对数函数, 则实数 $a =$.

13、对数函数的图象过点 $(16, 2)$, 则对数函数的解析式为_____.

14、已知函数 $f(x) = 2 + \log_3 x$ 的定义域为 $[1, 9]$, 则函数 $f(x)$ 的值域是_____.

15、已知函数 $f(x) = \log_3(-x^2 + 2x + 3)$, 则 $f(x)$ 的值域是_____.

16、设 $a = \log_2 0.3$, $b = \log_{\frac{1}{2}} 0.4$, $c = 0.4^{0.3}$, 则 a, b, c 的大小关系为_____.

17、(2019年真题) $2^{x+5} > \frac{1}{4}$, 则 x 的取值范围是

- A、 $(-7, +\infty)$ B、 $(7, +\infty)$ C、 $(-3, +\infty)$ D、 $(3, +\infty)$

18、(2013年真题) 不等式 $\log_2(4 + 3x - x^2) \leq \log_2(4x - 2)$ 的解集为

- A、 $\{x | -3 < x \leq 2\}$ B、 $\{x | x < -2\}$ C、 $\{x | -1 < x < 4\}$ D、 $\{x | 2 \leq x < 4\}$

19、(2012年真题) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x-a}{x+1}$ 在区间 $(0, 1)$ 单调递增, 则 a 的取值范围是_____

20、(2009年真题) 有下列四个函数

$f_1(x) = 2^{x-1} + 2^{-x-1}$ $f_2(x) = x^2 \sin x + x$ $f_3(x) = x^2 \cos x + x$ $f_4(x) = \ln \frac{2x+1}{2x-1}$ 其中是奇函数的是

- A、 $f_1(x), f_3(x)$ B、 $f_1(x), f_4(x)$ C、 $f_2(x), f_3(x)$ D、 $f_2(x), f_4(x)$

21、(2009年真题) 不等式 $\lg(x^2 - 5x + 4) < 1$ 的解集是

- A、 $(-1, 6)$ B、 $(1, 4)$ C、 $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$ D、 $(-1, 1) \cup (4, 6)$

22、(2005年真题) 求关于 x 的不等式 $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9$ 的解集

23、(2003年真题) 在同一坐标系中, 函数 $y = a^x$ 与 $y = \log_a x$ 的图象

A、关于原点对称 B、关于 x 轴对称 C、关于直线 $y = x$ 对称 D、关于 $y = -x$ 对称

24、(2003年真题) 已知 $3 < \left(\frac{1}{3}\right)^x < 27$, 那么

A、 $1 < x < 3$ B、 $-3 < x < -1$ C、 $-1 < x < 3$ D、 $x > 3$ 或 $x < -1$

25、(2003年真题) 比较 $\log_{\frac{1}{2}} 3$ 、 $\log_{\frac{1}{2}} 5$ 、 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ 的大小并用 " $<$ " 连结起来_____